30

К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ
ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ

+800 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ 2

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

2016

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

30 вариантов заданий

- + 800 заданий части 2
- Ответы и решения
- Критерии оценок
- Бланки ответов

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

30 вариантов заданий
+ 800 заданий части 2
Ответы и решения
Критерии оценок
Бланки ответов

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2016

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 **ЕГЭ** 2016. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль; **под ред. И. В. Ященко**. — М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2016. — 215, [1] с. (Серия «ЕГЭ. 30 вариантов. Типовые тестовые задания»)

ISBN 978-5-377-10213-7 (Издательство «Экзамен»)
ISBN 978-5-4439-0371-2 (МЦНМО)

Глава I книги содержит 30 вариантов комплектов типовых тестовых заданий по математике, составленных с учетом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена 2016 года.

В главе II книги отдельно представлены качественная информация о заданиях части 2 и обширная подборка задач части 2, скомпонованных по всем темам школьной математики.

Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов по математике, степени трудности заданий.

Авторы пособия — ведущие специалисты, принимающие непосредственное участие в разработке методических материалов для подготовки к выполнению контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов, приводятся решения всех заданий части 2 одного из вариантов, а также ответы на все задания части 2 главы II книги.

Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и выпускниками — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60×90/8.
Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 10,94.
Усл. печ. л. 27. Тираж 30 000 экз. Заказ 1428.

ISBN 978-5-377-10213-7 (Издательство «Экзамен»)
ISBN 978-5-4439-0371-2 (МЦНМО)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ

ГЛАВА II. ЗАДАНИЯ ЧАСТИ 2

ГЛАВА I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 задание. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

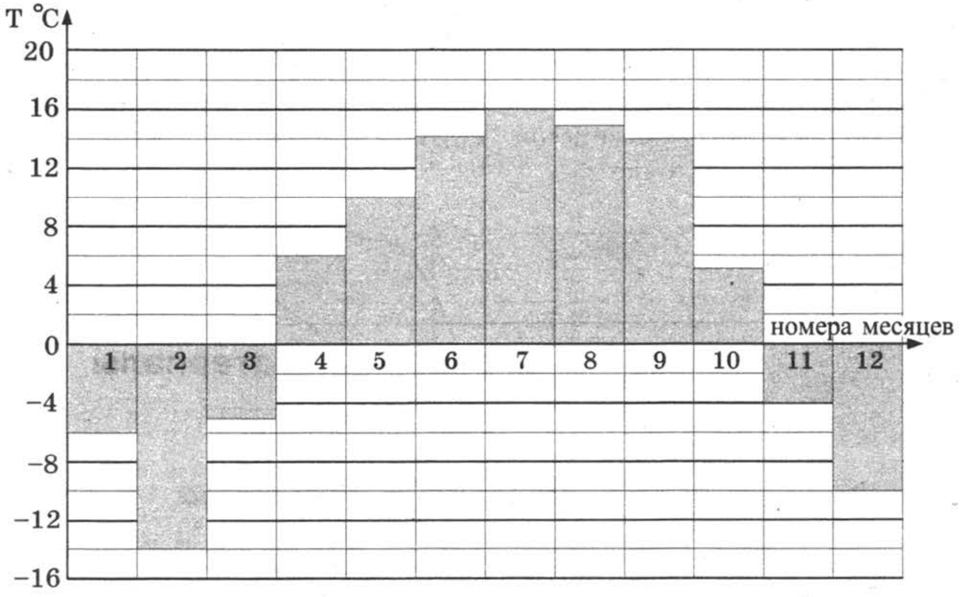
Часть 1

1 ☐

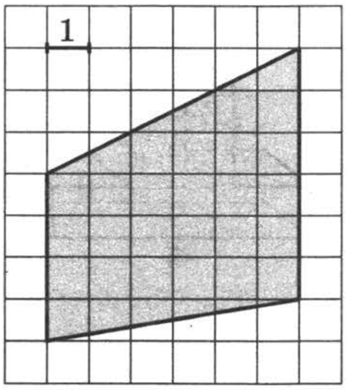
1. В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 26 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

2 ☐

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.



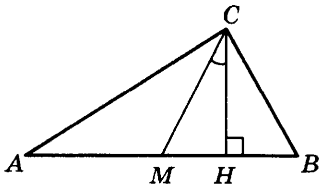
3. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



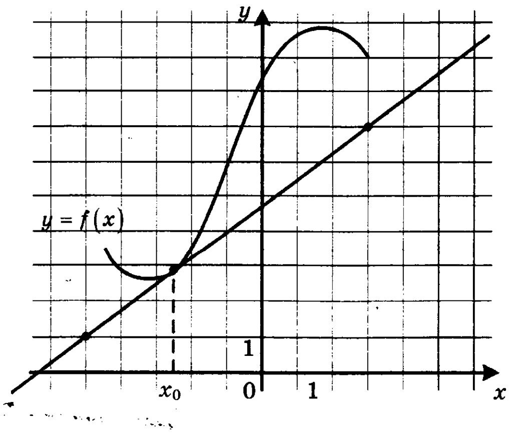
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{15-7x}=8$.

6. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

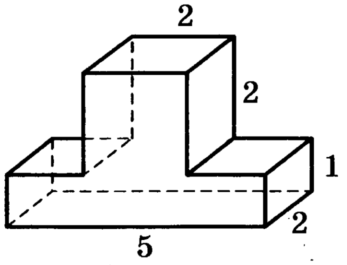


7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8 ☐

8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

9 ☐

9. Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

10 ☐

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{21}$ м^2, а излучаемая ею мощность P равна $5{,}7 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

11 ☐

11. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

12 ☐

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 18x^2 + 17$ на отрезке $[-3;\ 3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi;\ 3\pi]$.

14. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, с основанием $ABCD$, равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен $45°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

15. Решите неравенство $7^{\ln\left(x^2-2x\right)} \le (2-x)^{\ln 7}$.

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

17. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4; 19).

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

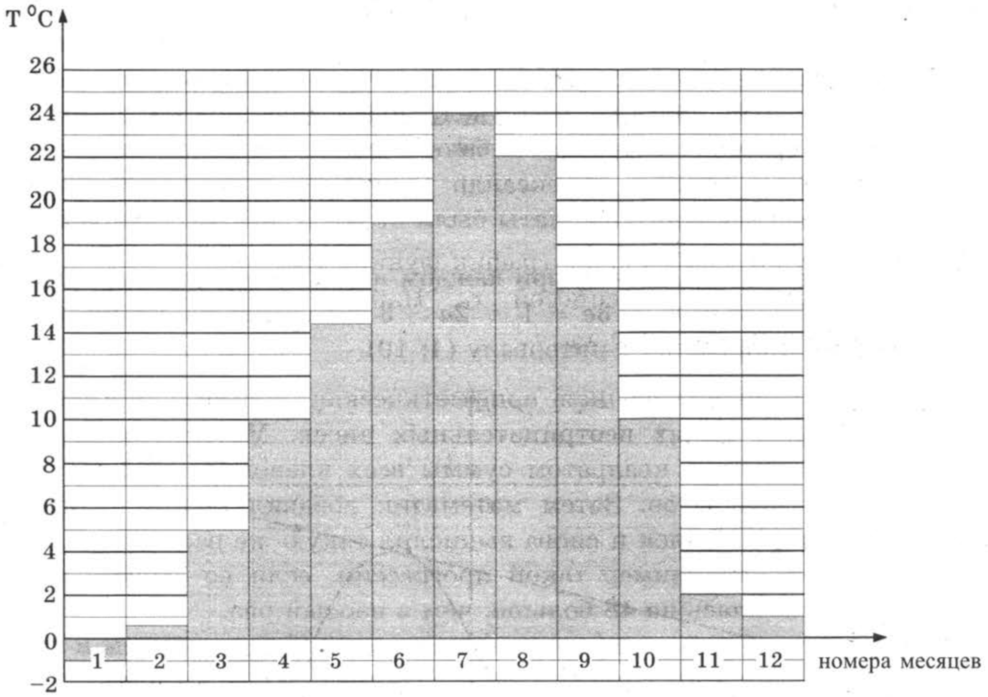
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 2

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

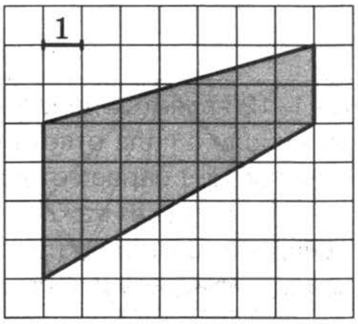
Часть 1

1. **Флакон шампуня стоит 190 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?**

2. **На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый номера месяцев 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Симферополе в 1988 году.**



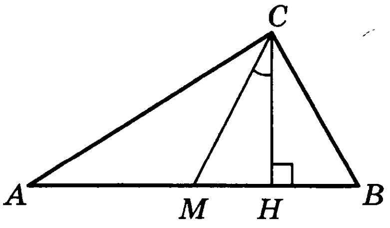
3. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



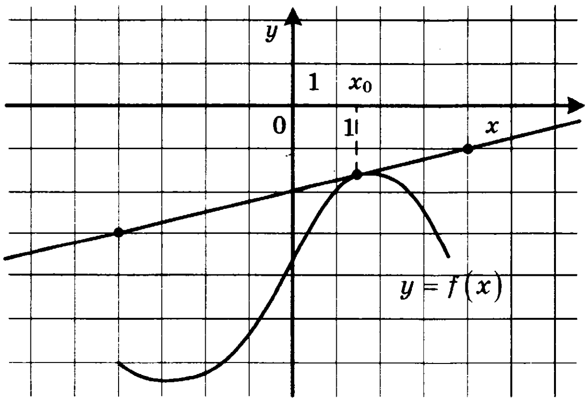
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{1-6x} = 7$.

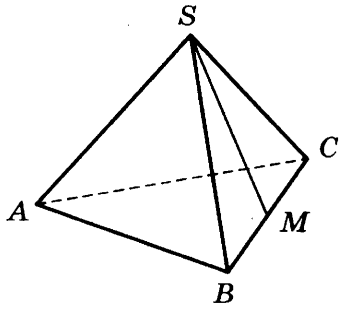
6. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 26°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $AB = 6$, а площадь боковой поверхности равна 45. Найдите длину отрезка SM.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{6\cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21}\ \text{м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $4{,}104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

11. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 21 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 19$ на отрезке $[-6; -2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

14. Площадь основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, а площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна $32\sqrt{3}$.

а) Докажите, что угол между плоскостью основания пирамиды и боковым ребром равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

15. Решите неравенство $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2} - \dfrac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \ge 0$.

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

17. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 3

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

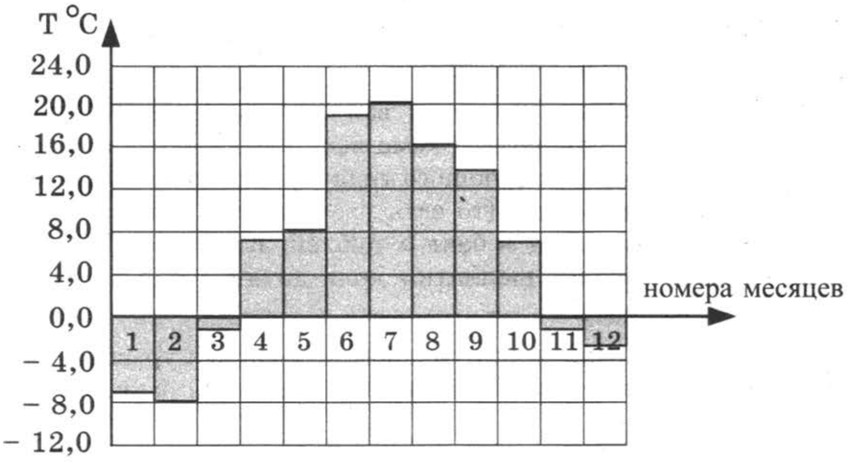
Часть 1

1

1. Для ремонта квартиры купили 42 рулона обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

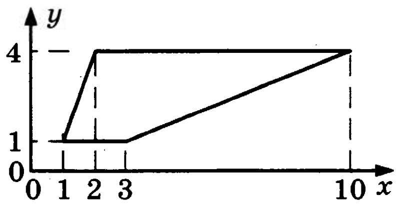
2

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев второго полугодия 1999 года средняя температура была ниже 14 °С.



3

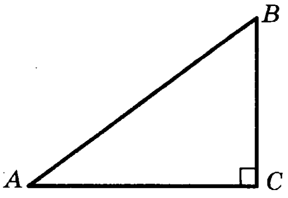
3. Найдите площадь трапеции с вершинами (1; 1), (2; 4), (10; 4), (3; 1).



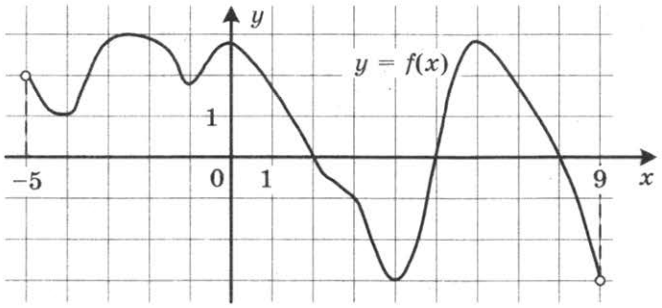
4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

5. Решите уравнение $\sqrt{7-x} = 4$.

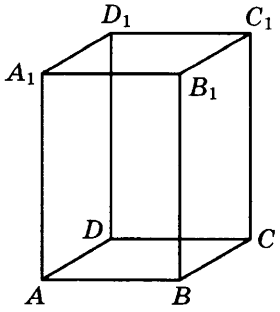
6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите $\sin B$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



8. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30°. Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}1$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 33 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

11. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 5e^{x} - 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $7\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите неравенство $2^{x} + 3 \cdot 2^{-x} \le 4$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку за первые 12 месяцев?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x+1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

19. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел −1, 2, 4, −6, 7, −8, −10, 12. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел −1, 2, 4, −6, 7, −8, −10, 12. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

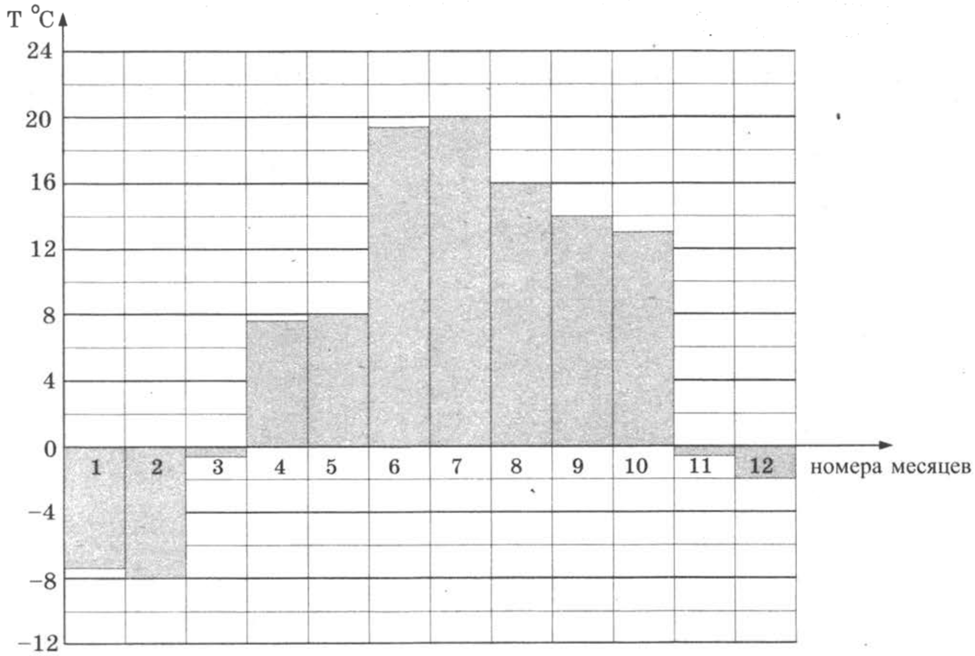
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 4

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

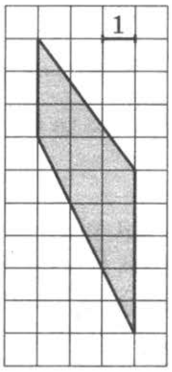
Часть 1

1. Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Санкт-Петербурге в 1999 году.



3. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



3

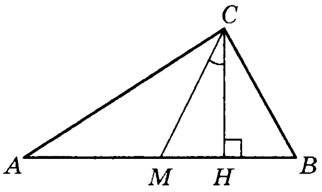
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

4

5. Найдите корень уравнения $\log_5(-2 - x) = 1$.

5

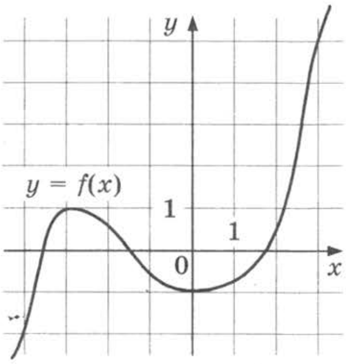
6. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 32°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



6

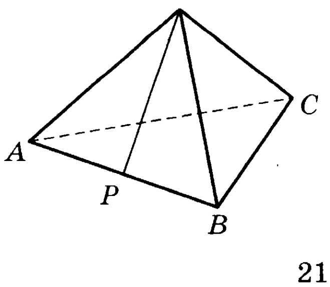
7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите точку, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 3]$.

7



8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка P — середина ребра AB, S — вершина. Известно, что $BC = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка SP.

8



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{2\cos 28^\circ}{\cos 152^\circ}$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \dfrac{1}{72} \cdot 10^{21}\,\text{м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $1{,}026 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

11. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 39 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 26 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

12. В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$ с основанием $ABCD$, стороны основания которой равны $5\sqrt{2}$. Точка L — середина ребра MB. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые AO и LO перпендикулярны.

б) Найдите высоту данной пирамиды.

15. Решите неравенство $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \le \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right)$.

16. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

19. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

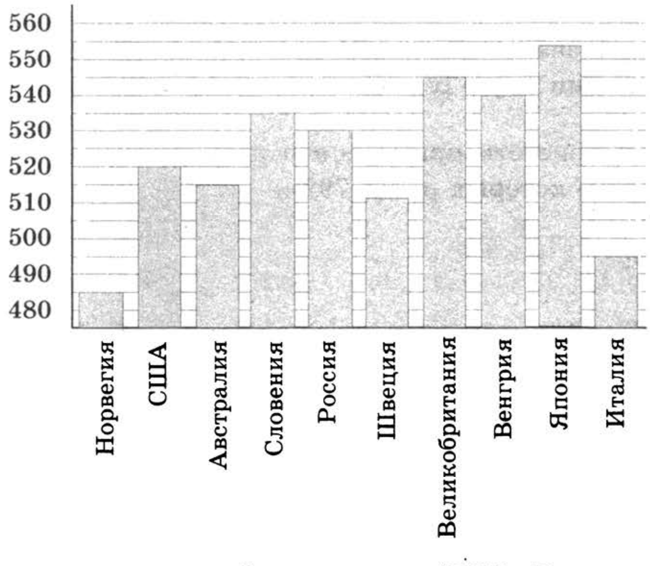
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 5

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

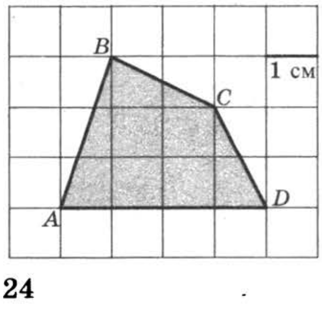
Часть 1

1. Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 26 кг яблок?

2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран второе место принадлежит Великобритании. Определите, какое место занимает Россия.



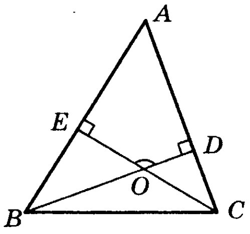
3. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$. Размер каждой клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



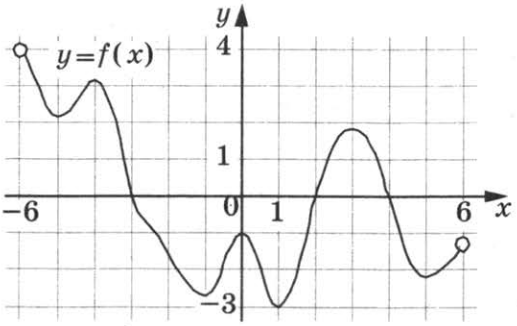
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+31}=9$.

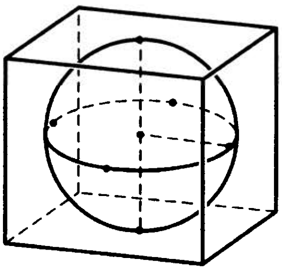
6. В треугольнике ABC угол A равен 56°, углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[-5{,}5;4]$.



8. Шар, объём которого равен π, вписан в куб. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{9\sin 132^\circ}{\sin 228^\circ}$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{11}$ м^2, а излучаемая ею мощность P равна $46{,}17 \cdot 10^{12}$. Определите температуру этой звезды.

11. Первая труба наполняет бак объёмом 570 литров, а вторая труба — бак объёмом 530 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 4 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4{,}5; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5; -4]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

15. Решите неравенство $1 + \log_6(4 - x) \le \log_6(16 - x^2)$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30°$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 200 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x+2| + 3\sqrt{x^2+4x+13} = 5a + 2|x-2a+2|$$

имеет хотя бы один корень.

19. а) Приведите пример такого натурального числа n, что числа n^2 и $(n+16)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте a свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n, таких, что n^2 и $(n+m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 6

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

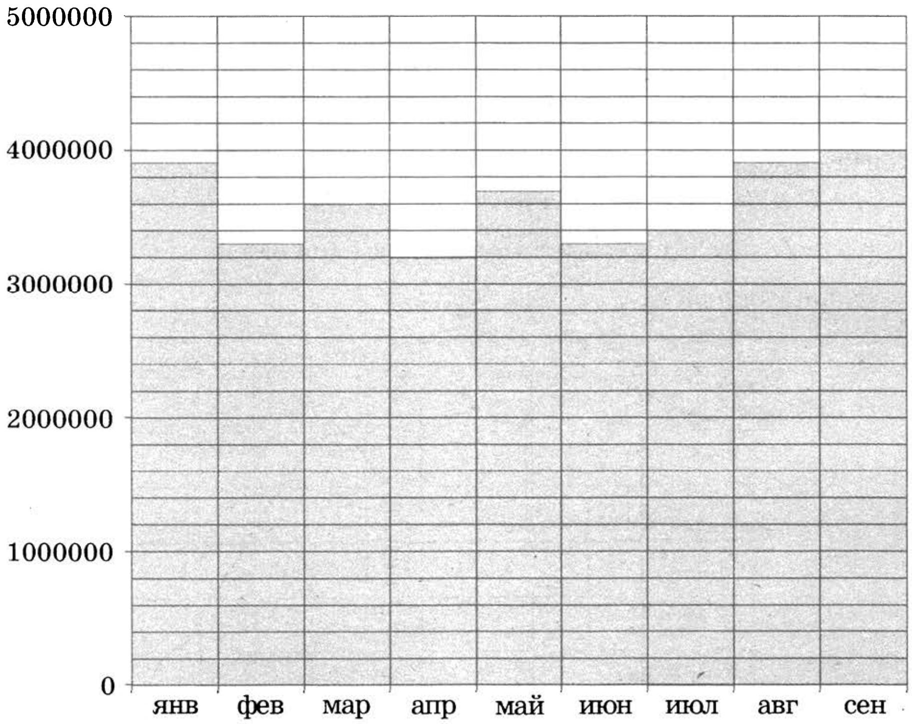
Часть 1

1 ☐

1. Система навигации, встроенная в спинку самолётного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 36 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

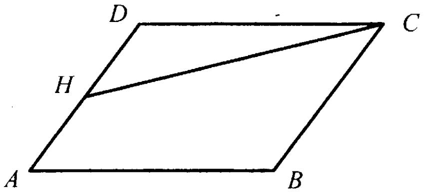
2 ☐

2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3. Точка H — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $AHCB$.

☐ **3**



4. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 2 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

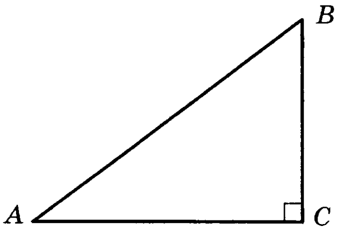
☐ **4**

5. Найдите корень уравнения $\log_6(8-x)=\log_{36}9$.

☐ **5**

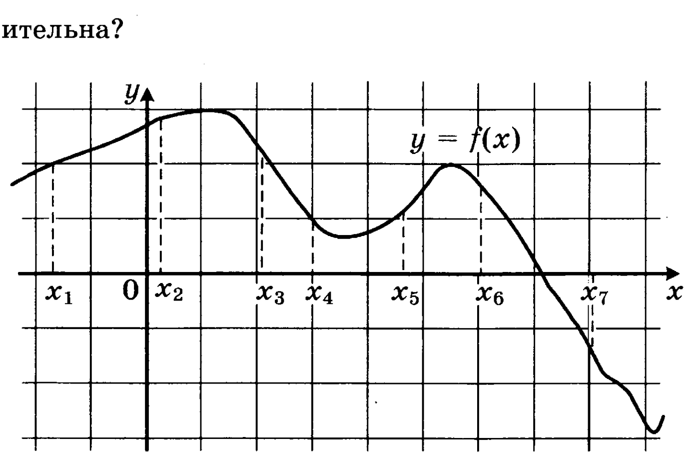
6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A=\frac{3}{5}$. Найдите $\cos B$.

☐ **6**

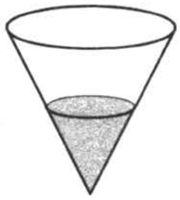


7. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y=f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

☐ **7**



8. В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.). Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?



Часть 2

9. Найдите $4\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0,5$.

10. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит 210 тыс. руб.

11. Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 11\operatorname{tg} x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(49^{\cos x}\right)^{\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

15. Решите неравенство $\frac{2x^2-8x}{x-7} \le x$.

16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

17. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых любое число из отрезка $2 \le x \le 3$ является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

19. Пусть q – наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 7

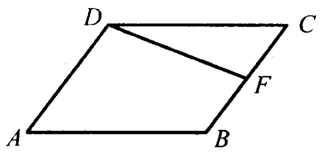
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3500 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1700 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1100 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

2. На рисунке жирными точками показана цена тонны никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите (в минутах) по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).

3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 92. Точка F — середина стороны BC. Найдите площадь трапеции $ADFB$.

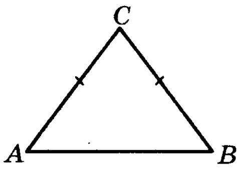


4. Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что первые два броска окончатся одинаково.

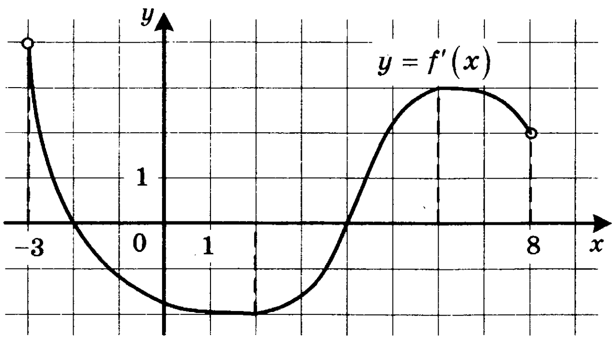
5. Найдите корень уравнения $\sqrt{4x+5}=5$.

6. В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\sin A = \frac{4}{5}$.

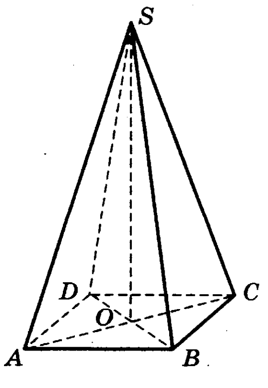
Найдите AB.



7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 13$, $BD = 10$. Найдите длину отрезка SO.



Часть 2

9. Вычислите $\log_5 135 - \log_5 5{,}4$.

10. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора получена экспериментально: $T = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -30$ К/мин^2, $b = 180$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор.

11. В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 80}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 2, точка M — середина ребра AB, точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая MF перпендикулярна прямой SC.

б) Найдите угол между плоскостью MBF и плоскостью ABC.

15. Решите неравенство $9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511$.

16. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

17. В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 19 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

18. При каких значениях a уравнение $\left|x^2-4x-5\right|-3a=\left|x-a\right|-1$ имеет ровно три корня?

19. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

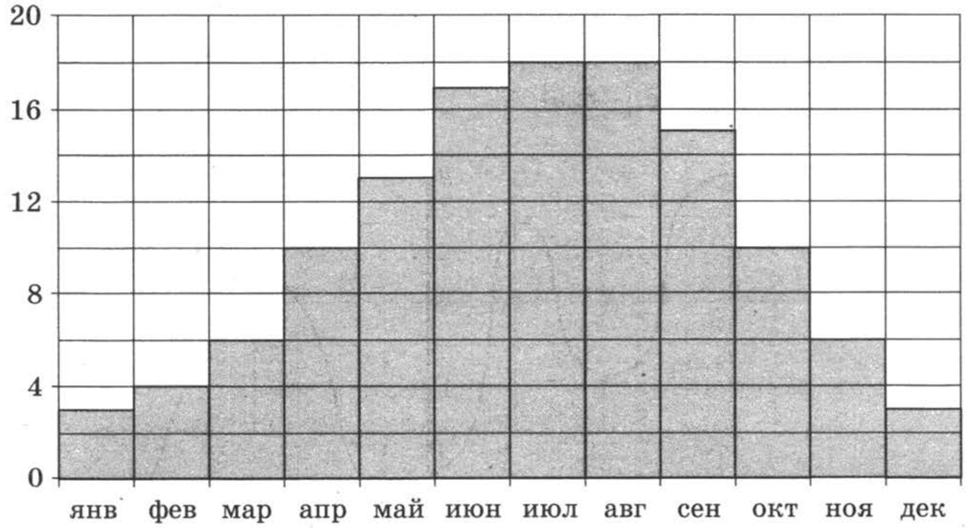
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

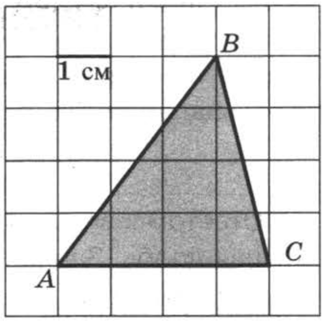
Часть 1

1. В спортивном лагере по настольному теннису каждый день ломается или теряется 8 теннисных шариков. Лагерная смена длится 18 дней. Шарики продают упаковками по 10 штук. Какое наименьшее количество упаковок шариков нужно купить на одну лагерную смену?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была равна 10 градусам Цельсия.



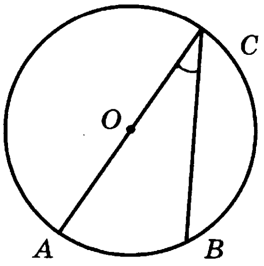
3. Найдите площадь треугольника ABC. Размер каждой клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



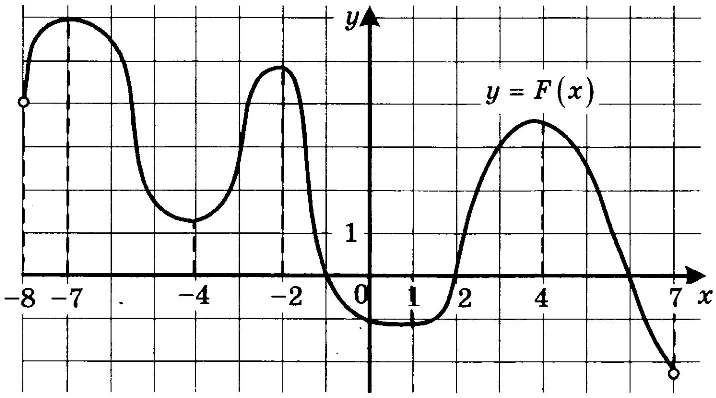
4. Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,84. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

5. Найдите корень уравнения $\log_4(x+7)=2$.

6. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 2/9 окружности. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y=F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-5;5]$.



8. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 98 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 7 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Часть 2

9. Найдите $16\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0,5$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 4\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2\cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 22$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 27,2 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

11. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{27 + 6x - x^2}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $7^{x^2-2x} + 7^{x^2-2x-1} = 56$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковые рёбра равны 2, а стороны основания — 1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через вершину S и середины рёбер AF и CD, перпендикулярна плоскости основания.

б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

15. Решите неравенство $\log_{x^3-9x^2+27x-27}(9-x)\geq 0$.

16. Противоположные стороны AD и BC четырёхугольника $ABCD$ параллельны. Через вершины B и D проведены параллельные прямые, пересекающие диагональ AC в точках M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MN = NC$.

а) Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника $BMDN$ к площади параллелограмма $ABCD$.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\dfrac{2(k+1)\cos t-k}{\sin t+\cos t}=2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

19. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3825.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

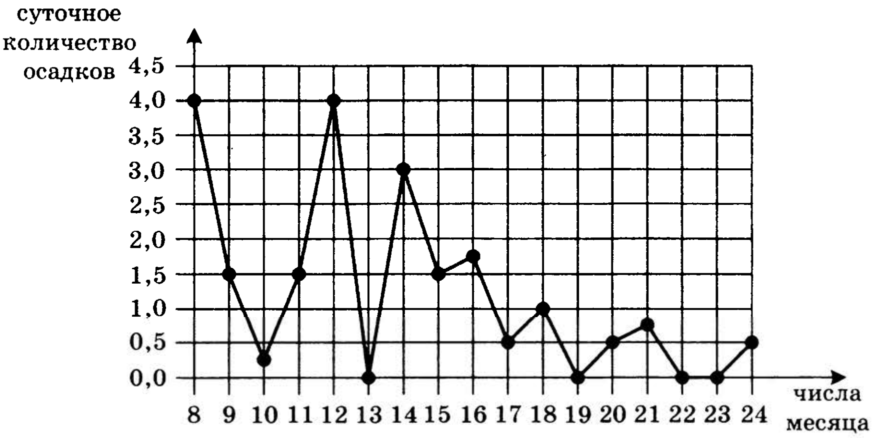
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 9

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

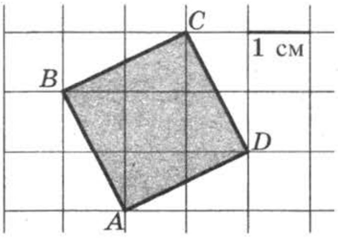
Часть 1

1. Поезд Екатеринбург—Москва отправляется в 7:23, а прибывает в 9:23 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода осадков не было.



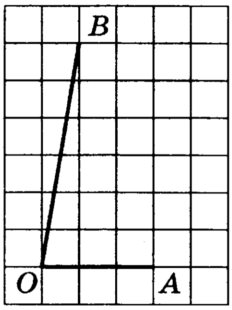
3. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



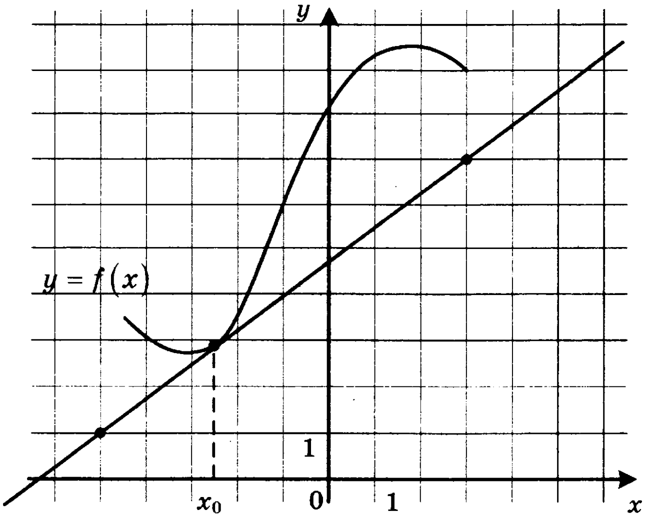
4. В среднем из каждых 50 поступивших в продажу аккумуляторов 48 аккумуляторов заряжены. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор не заряжен.

5. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{7x-8} = 2$.

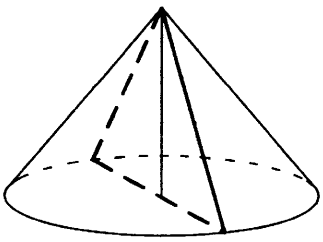
6. Найдите тангенс угла AOB, изображённого на клетчатой бумаге.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Диаметр основания конуса равен 14, а длина образующей — 25. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $7 \cdot 5^{\log_5 2}$.

10. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 25$ метров, а зазор между соседними рельсами равен 12 мм. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\,(°\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре зазор между рельсами исчезнет? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

11. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,3 км от места отправления. Один идёт со скоростью 4 км/ч, а другой — со скоростью 4,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x - 4\,\mathrm{tg}\,x + \pi - 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot (0,2)^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно прямой BD_1, делит отрезок BD_1 в отношении 1 : 7, считая от вершины D_1.

б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1, и плоскостью основания призмы.

15. Решите неравенство $\frac{2}{x^2-12x+35}+\frac{3}{x^2-17x+70}\le 0$.

16. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Из вершины A опущены перпендикуляры AF, AH, AP и AQ на прямые DE, BE, CD и BC соответственно.

а) Докажите, что $\angle FAH = \angle PAQ$.

б) Найдите AH, если $AF = a$, $AP = b$ и $AQ = c$.

17. В двух областях есть по 250 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-\left(a^2-2a-3\right)\cos x+4}{\sin^2 x+a^2+1}<1$ содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

19. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 312 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 10

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

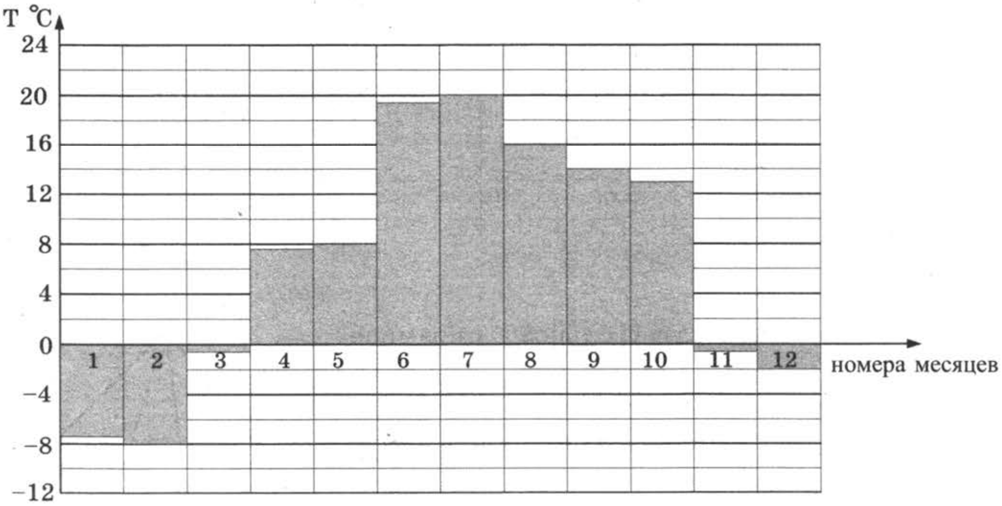
Часть 1

1 ☐

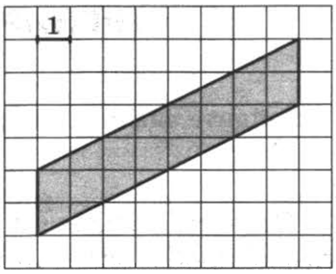
1. Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 950 рублей после понижения цены на 25%?

2 ☐

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разницу средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1999 году в Санкт-Петербурге. Ответ дайте в градусах Цельсия.



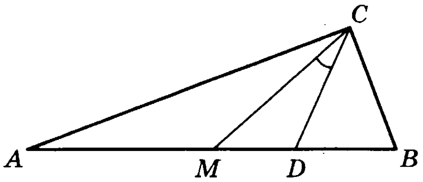
3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



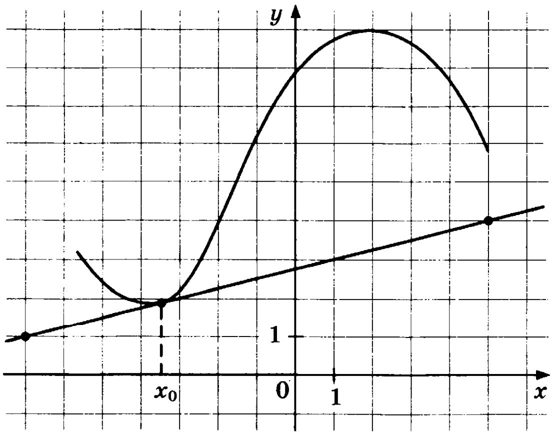
4. В группе туристов 5 человек, в том числе турист Д. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу Д. выпадет по жребию идти в село?

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{25+3x}=4$.

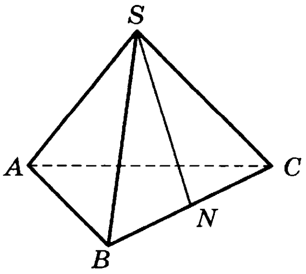
6. Острые углы прямоугольного треугольника равны 69° и 21°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $SN = 6$, а площадь боковой поверхности равна 72. Найдите длину отрезка AB.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-20\operatorname{tg}52^\circ\cdot\operatorname{tg}142^\circ$.

10. К источнику с ЭДС $\mathcal{E}=55$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U=\dfrac{\mathcal{E}R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 50 В? Ответ выразите в омах.

11. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 16 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она меньше 60 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 17$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x + 2\cos^2 x - \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что плоскости ABC_1 и CDA_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

15. Решите неравенство $2^{2x-1} - 7\cdot 2^{x-1} + 5 \le 0$.

16. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что восьмая выплата составила 99,2 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x - \left|3x - |x + a|\right| = 9|x - 3|$ имеет два корня.

19. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 672 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 11

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

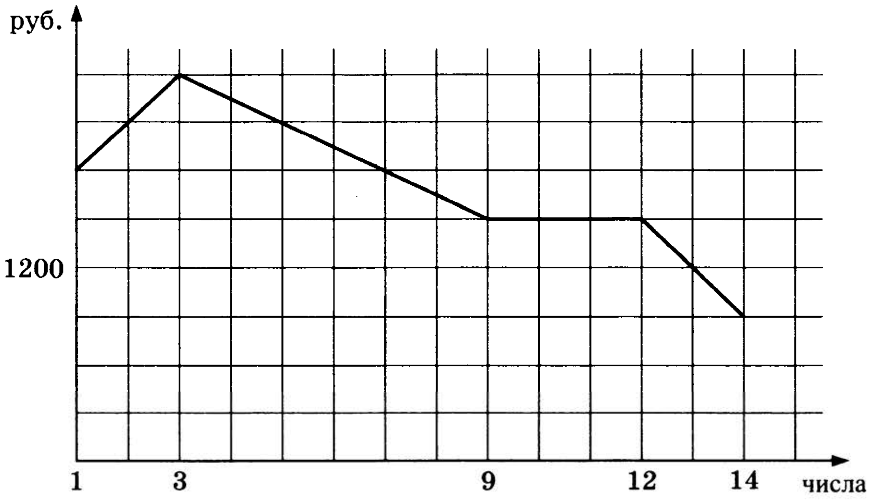
Часть 1

1 ☐

1. Футболка стоит 160 рублей. Какое наибольшее число футболок можно купить на 600 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 20%?

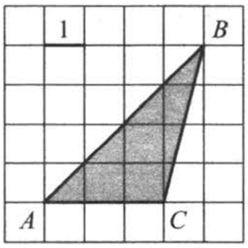
2 ☐

2. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3 ☐

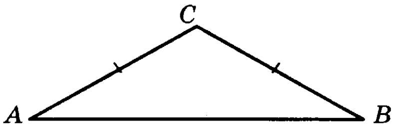
3. Найдите площадь треугольника ABC, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.)



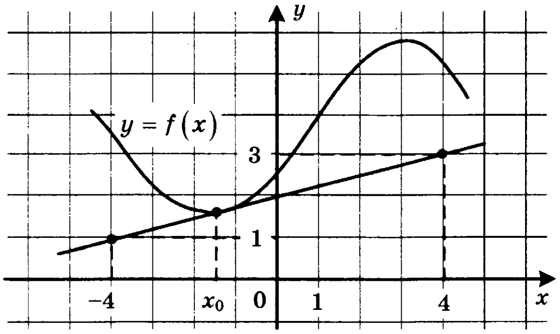
4. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

5. Решите уравнение $\sqrt{x+9}=5$.

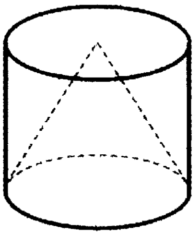
6. В треугольнике ABC угол A равен 29°, $AC = BC$. Найдите угол C.



7. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Объём цилиндра равен 12. Чему равен объём конуса, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный цилиндр?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.

10. Зависимость объёма спроса q (тыс. руб.) на продукцию **предприятия**-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 160 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 280 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

11. Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 8e^{x} + 9$ на отрезке $[0; 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5^{x^2-4x+1} + 5^{x^2-4x} = 30$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 3]$.

14. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1, причём $BP : PB_1 = 1 : 3$.

а) Пусть M — середина A_1B_1. Докажите, что прямые MP и AC перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

15. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} + \dfrac{2}{x - 3} \le x$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 60 и 80.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 6000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

☐ 17

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\dfrac{1+(2-2k)\sin t}{\cos t-\sin t}=2k$ имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

☐ 18

19. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи чисел получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 чисел получившейся последовательности, идущих подряд?

☐ 19

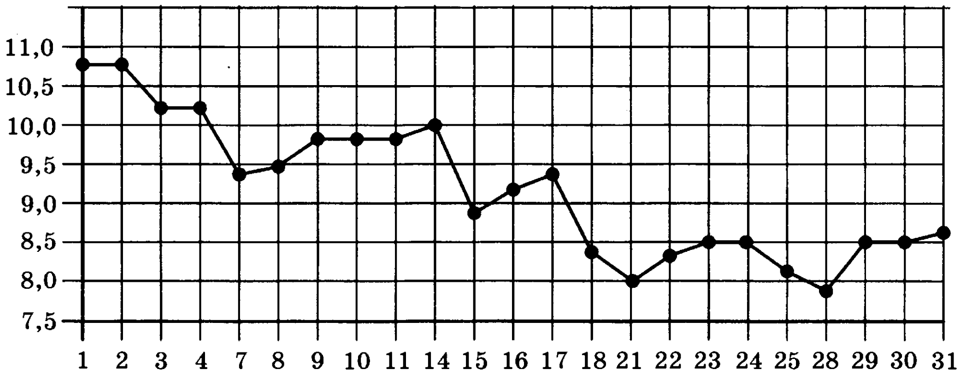
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 12

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

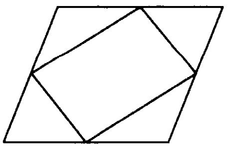
Часть 1

1. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

2. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра была наименьшей за указанный период.



3. Площадь параллелограмма равна 14. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.



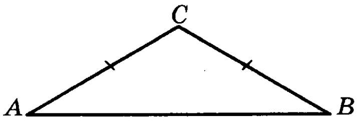
4. В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 990 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе. Результат округлите до тысячных.

☐ **4**

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{14+5x}=7$.

☐ **5**

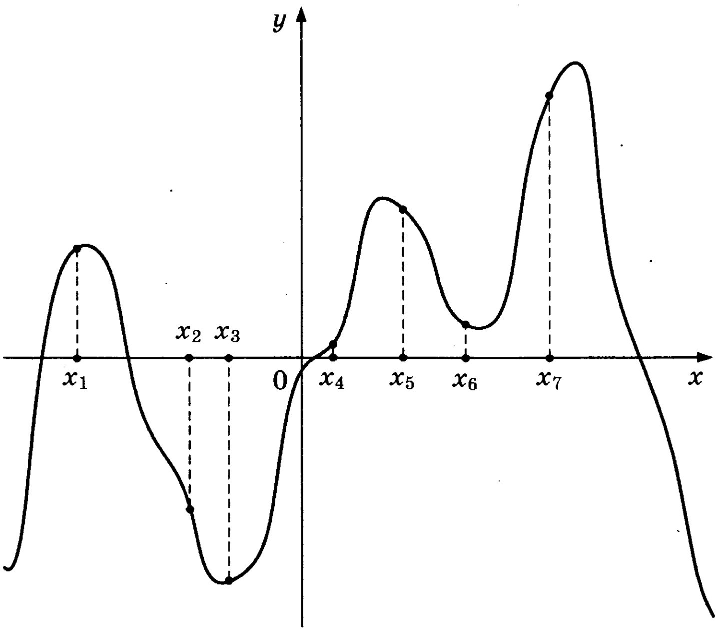
6. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен $120°$, $AB=\sqrt{3}$. Найдите AC.



☐ **6**

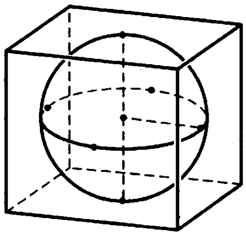
7. На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?

☐ **7**



8. Шар, объём которого равен 42π, вписан в куб. Найдите объём куба.

☐ **8**

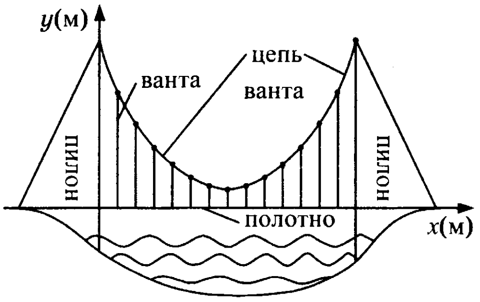


Часть 2

9. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha\in(\pi;\ 2\pi)$.

☐ **9**

10. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0013x^2 - 0{,}35x + 27$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



11. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1; 4]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SB в отношении $1 : 3$, считая от вершины B.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

15. Решите неравенство $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30°$.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

18. Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{2a + x^2 - 4\log_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log^2_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

19. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 13

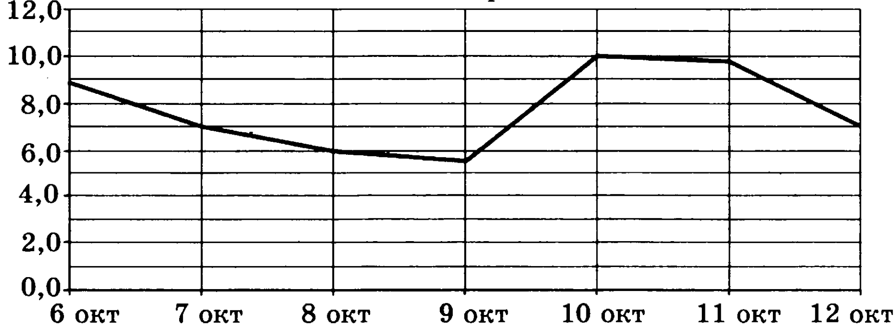
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Сырок стоит 5 руб. 40 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 40 рублей?

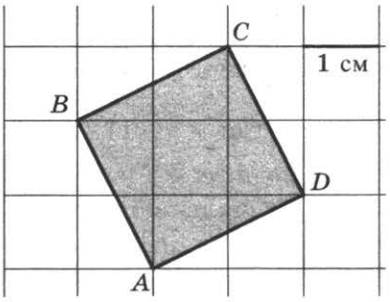
2. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия.

Среднесуточная температура в Саратове
с 6 по 12 октября 1969 г.



Определите по графику, сколько дней из указанного периода средняя температура была в пределах от 6,5 °C до 9 °C.

3. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

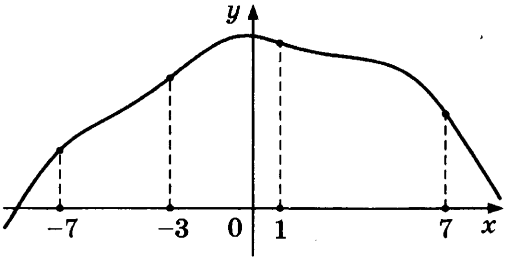


4. **В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.**

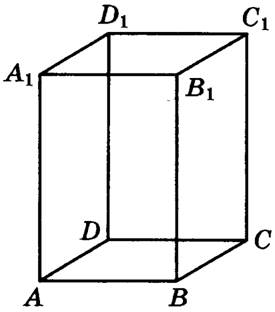
5. Решите уравнение $\sqrt{x+4} = 7$.

6. **Диагонали трапеции *ABCD* с основаниями *AB* и *CD* пересекаются в точке *M*. Найдите *MC*, если $AB = 11$, $DC = 33$, $AC = 28$.**

7. **На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −7, −3, 1, 7. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.**



8. **Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30°. Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.**



Часть 2

9. **Найдите значение выражения $\log_3 13 - \log_3 117$.**

10. **В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 200$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг?**

11. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 + 20x^3 - 65x$ на отрезке $[-4; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6^{x^2-4x} + 6^{x^2-4x-1} = 42$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2; 4]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 6, точка M — середина ребра BC, точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды.

а) Найдите отношение, в котором плоскость CMF делит отрезок SA, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC.

15. Решите неравенство $\log_x(x-2) \cdot \log_x(x+2) \le 0$.

16. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM : MB = 1:2$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD = 2\sqrt{3}$.

17. 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму в кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11%), затем Василий переводит в банк 3 696 300 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

18. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} |x^2 - x - 6| = (y-1)^2 + x - 7, \\ 3y = 2x + a \end{cases}$$

имеет ровно один или два корня.

19. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 14

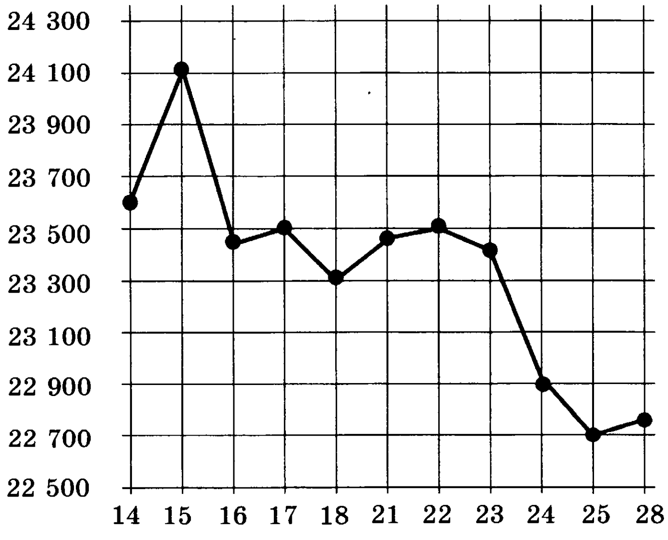
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

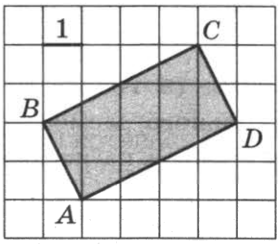
1. Каждый день во время конференции расходуется 120 пакетиков чая. Конференция длится 3 дня. Чай продаётся в пачках по 50 пакетиков. Какое наименьшее количество пачек нужно купить на все дни конференции?

2. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года.

   По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



3. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



☐ **3**

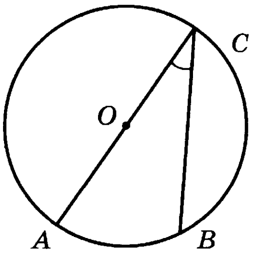
4. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

☐ **4**

5. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

☐ **5**

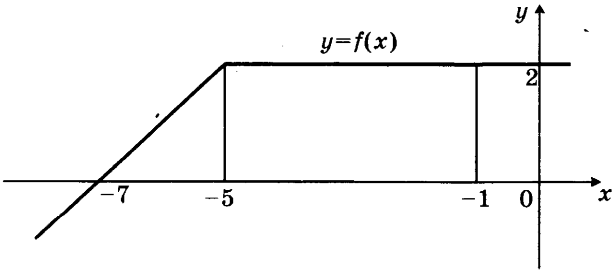
6. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 1/5 окружности. Ответ дайте в градусах.



☐ **6**

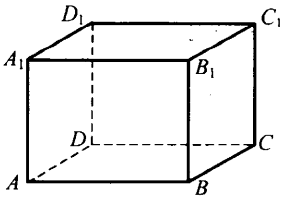
7. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

$$\int_{-7}^{-1} f(x)dx.$$



☐ **7**

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 32$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C, C_1 и A.



☐ **8**

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3{,}5$.

10. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально, и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин, $b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

11. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 11\operatorname{tg} x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

15. Решите неравенство $4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \le 0$.

16. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{3}{4}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

19. На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

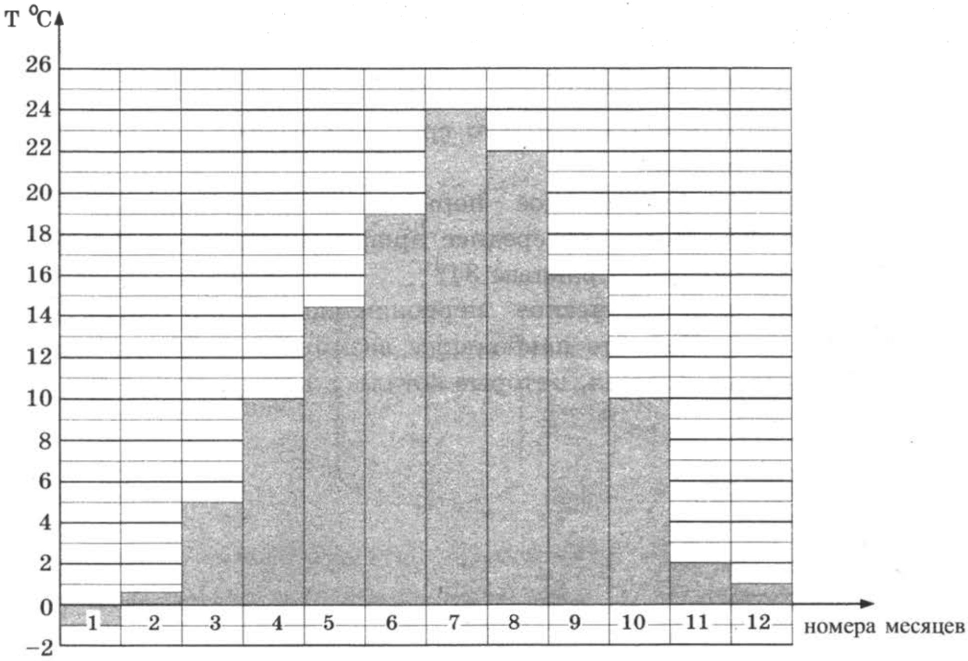
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 15

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

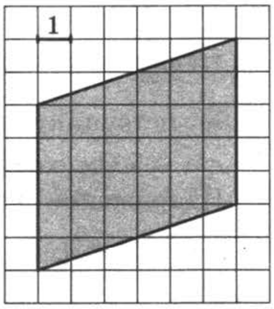
Часть 1

1. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 470 рублей после понижения цены на 25%?

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1988 году в Симферополе. Ответ дайте в градусах Цельсия.



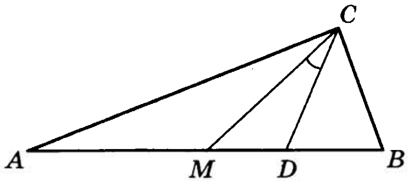
3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



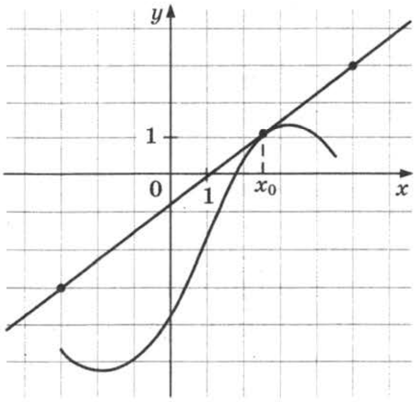
4. В группе туристов 8 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{5+2x}=3$.

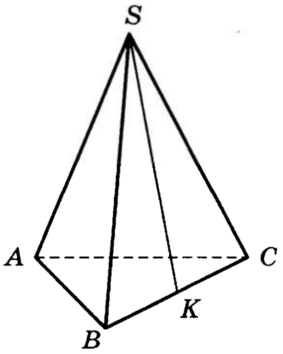
6. Острые углы прямоугольного треугольника равны 87° и 3°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра BC, S — вершина. Известно, что $SK=10$, а площадь боковой поверхности равна 60. Найдите длину отрезка AB.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $2\,\mathrm{tg}\,15^\circ\cdot\mathrm{tg}\,105^\circ$.

10. К источнику с ЭДС $\mathscr{E}=65\,\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U=\frac{\mathscr{E}R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 60 В? Ответ выразите в омах.

11. Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 105 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 50 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 19$ на отрезке [1; 3].

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\cdot 9^{x^2-4x+1}+42\cdot 6^{x^2-4x}-15\cdot 4^{x^2-4x+1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;3]$.

14. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер AB, AC и SA, отсекает от пирамиды $SABC$ пирамиду, объём которой в 8 раз меньше объёма пирамиды $SABC$.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

15. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\frac{24+2x-x^2}{14}>1$.

16. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 3$.

17. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \left|2x^2 + y^2 - 1\right| + y^2 + 4y = 0, \\ y = 0,5x + a \end{cases}$$

имеет два или три корня.

19. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 2?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{4}{3}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 20?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 16

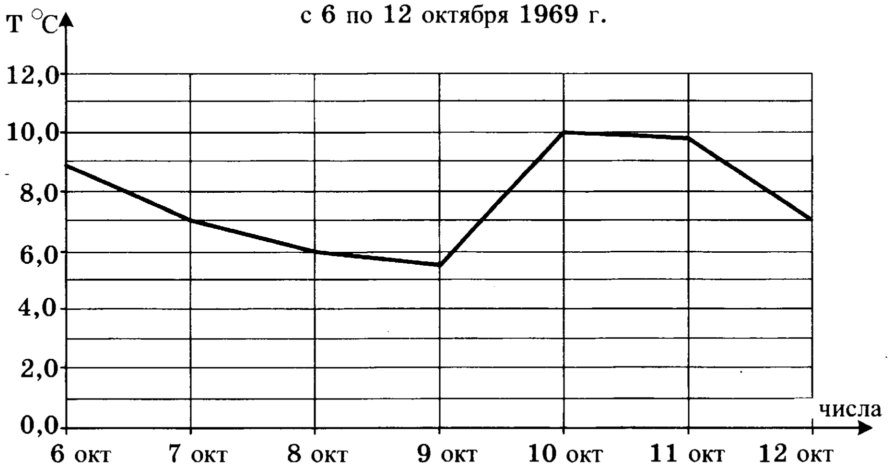
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

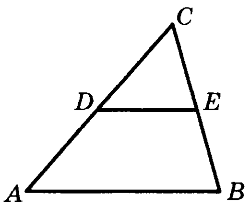
1. Поезд Москва–Ижевск отправляется в 17:41, а прибывает в 10:41 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Среднесуточная температура в Саратове
с 6 по 12 октября 1969 г.



3. В треугольнике ABC DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 24. Найдите площадь треугольника ABC.



4. В каждой пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Галя покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Галя не найдёт приз в своей банке.

☐ 4

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{7x-49}}=\frac{1}{7}$.

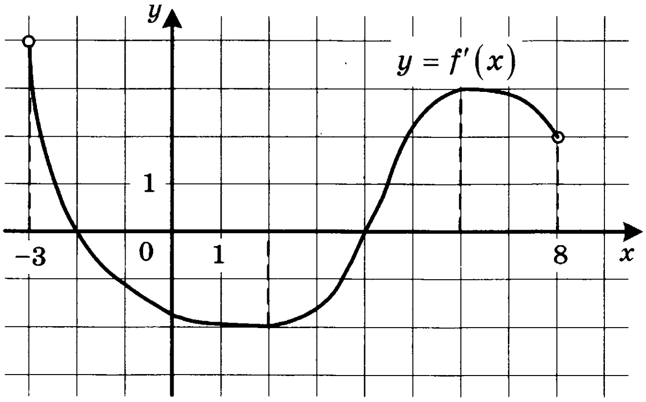
☐ 5

6. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

☐ 6

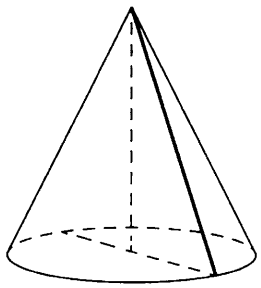
7. На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

☐ 7



8. Высота конуса равна 30, а диаметр основания равен 32. Найдите образующую конуса.

☐ 8



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{4\sin 17^\circ \cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$.

☐ 9

11 ☐

10. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит 210 тыс. руб.

11 ☐

11. Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

12 ☐

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^{x} + 7$ на отрезке $[0;\ 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 ☐ ☐

13. Решите уравнение $\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 x + 4\operatorname{ctg} x}{5\cos^2 x - 4\cos x} = 0$.

14 ☐

14. В пирамиде $SABC$ известны длины ребер $AB = AC = SB = SC = 10$, $BC = SA = 12$. Точка K — середина ребра BC.

а) Докажите, что плоскость SAK перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и BC.

15 ☐

15. Решите неравенство $\log^2_{|x|}(x^2) + \log_2(x^2) \le 8$.

16 ☐

16. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \dfrac{1}{6}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 958,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за первые 12 месяцев?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (a - 2x)^3 + 9x^2 + 3a = 6x$$

не имеет корней.

19. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 17

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

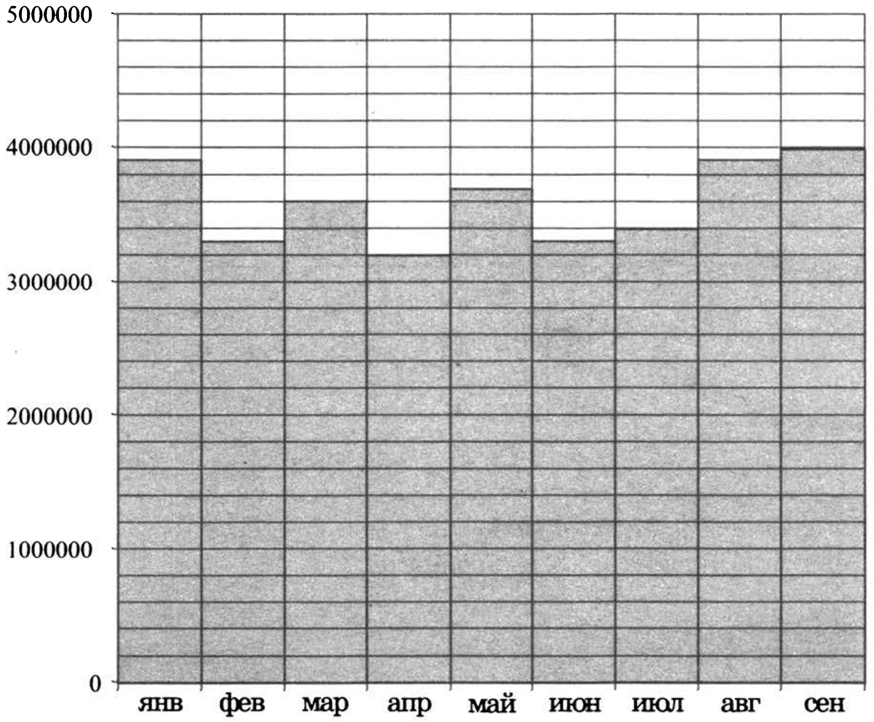
Часть 1

1 ☐

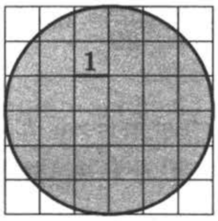
1. В туристический поход отправляется группа из 18 человек. В походе на одного человека приходится 60 граммов гречки на прием пищи. Планируется 7 раз готовить гречку. Сколько килограммовых пачек необходимо купить, чтобы гречки хватило?

2 ☐

2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3. Найдите площадь S круга, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

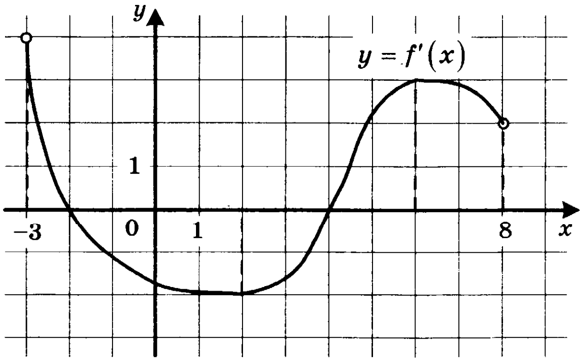


4. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зелёные». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах из трёх право первой владеть мячом получит команда «Белые».

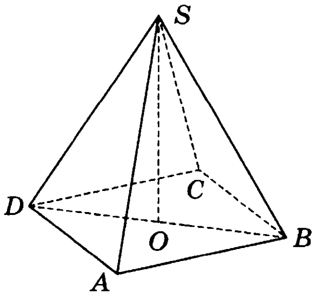
5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{4x+9} = \frac{1}{6x+12}$.

6. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21°, угол CAD равен 30°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $CS = 17$, $BD = 16$. Найдите длину отрезка SO.



Часть 2

9. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 24 километра? Ответ дайте в метрах.

11. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 8x^2 + 16x + 23$ на отрезке $[-13; -3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $7\sin^2 x + 8\cos x - 8 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

14. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P — середина ребра BB_1.

а) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости PAC.

15. Решите неравенство

$$\log_7 \frac{3}{x} + \log_7\left(x^2 - 7x + 11\right) \le \log_7\left(x^2 - 7x + \frac{3}{x} + 10\right).$$

16. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD.

17. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|2^{1-x} - a\right| - \left|\frac{1}{2^x} + 2a\right| = 4^{-x}$ имеет единственное решение.

19. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчика и две девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки?

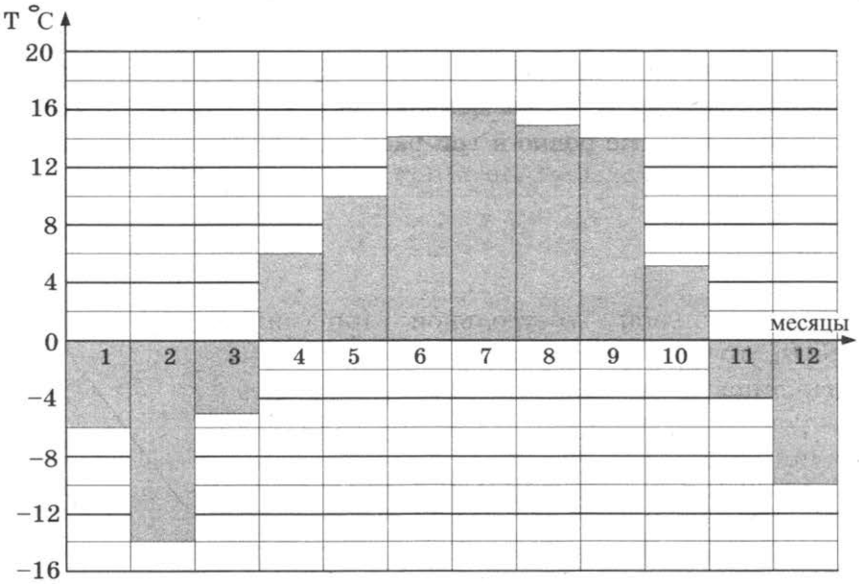
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 18

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

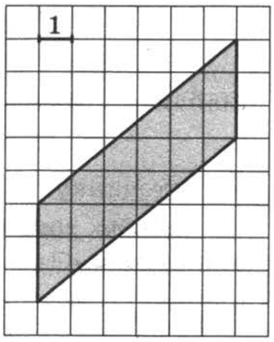
Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 900 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 400 руб. меньше. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1994 году в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.



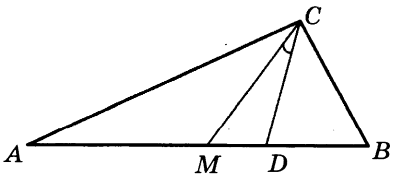
3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



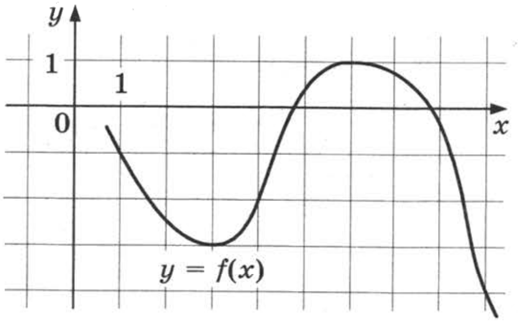
4. В группе туристов 10 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

5. Найдите корень уравнения $\log_3(-5-x)=1$.

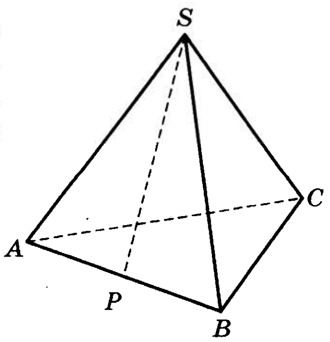
6. Острые углы прямоугольного треугольника равны 63° и 27°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке [1; 9].



8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — середина ребра AB, S — вершина. Известно, что $SP = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка BC.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-50\,\mathrm{tg}\,27^\circ\cdot\mathrm{tg}\,117^\circ$.

10. К источнику с ЭДС $\mathcal{E}=155\,\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U=\dfrac{\mathcal{E}R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В? Ответ выразите в омах.

11. Из точки А в точку В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 7 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12. В какой точке x_0 функция $y=\sqrt{3-3x-2x^2}$ принимает наибольшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)}=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

15. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$.

16. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, восьмая выплата составила 108 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x-2a+3)^2+(y-a)^2=2,25;\\(x+3)^2+(y-a)^2=a^2+2a+1\end{cases}$ имеет единственное решение.

19. Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

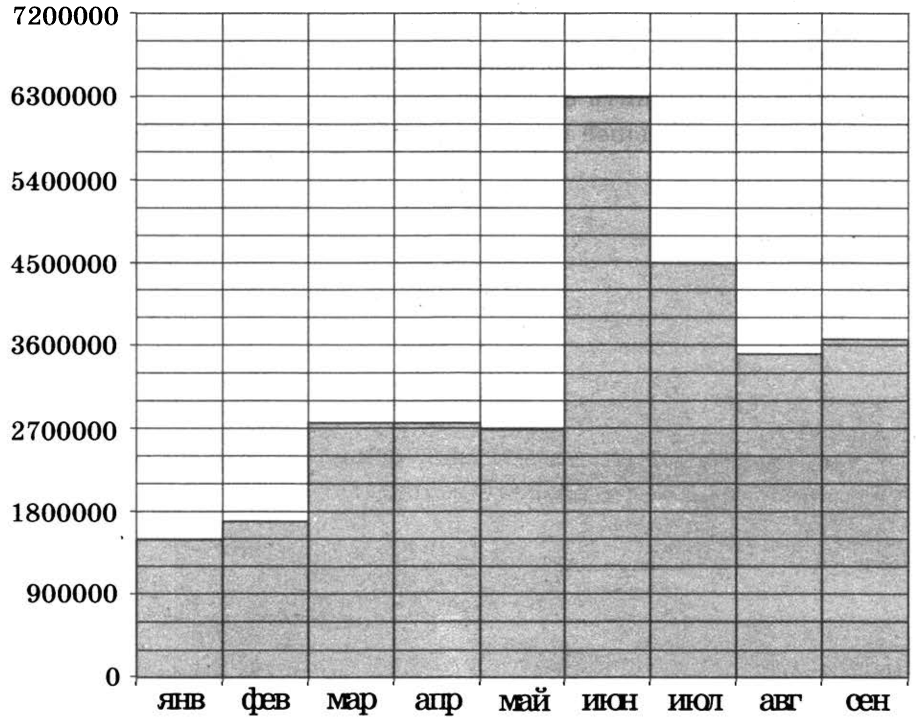
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 19

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

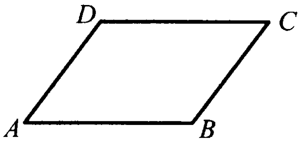
Часть 1

1. Летом килограмм черешни стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 800 г черешни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

2. На диаграмме показано число запросов со словом **ФУТБОЛ**, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда число запросов со словом **ФУТБОЛ** было меньше **3 600 000**.



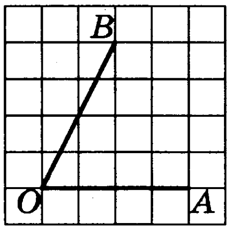
3. Периметр параллелограмма равен 30. Большая сторона равна 10. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



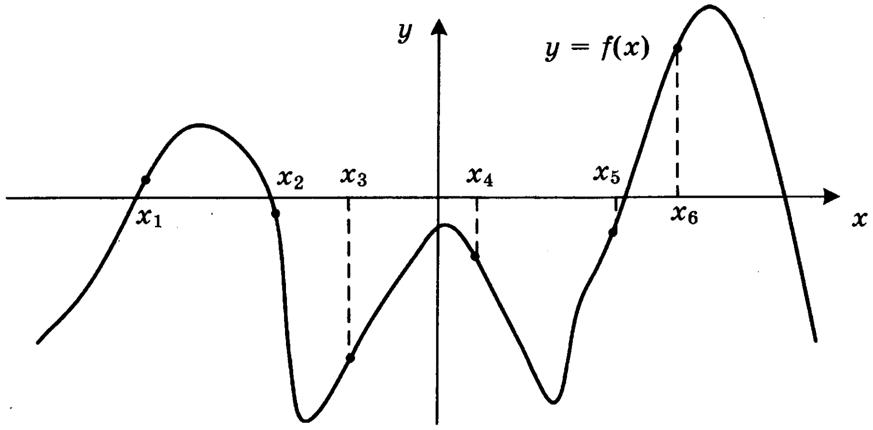
4. Двое играют в кости — они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадает поровну, то наступает ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выиграет.

5. Найдите корень уравнения $\log_4(5-x)=2$.

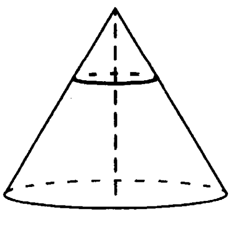
6. Найдите тангенс угла AOB, изображённого на клетчатой бумаге.



7. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.



8. Площадь основания конуса равна 63. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 1 и 2, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{5\sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.

10. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 3,2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

11. Города А, В и С соединены прямолинейным шоссе, причём город В расположен между городами А и С. Из города А в сторону города С выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города В в сторону города С выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 28 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами А и В равно 112 км?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{x-20}$ на отрезке [19; 21].

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AA_1 = 15$, $AB = 12$, $AD = 8$. Точка K — середина ребра C_1D_1, а точка L делит ребро BB_1 в отношении 4 : 1, считая от вершины B_1.

а) Найдите отношение, в котором плоскость LKA_1 делит ребро CC_1, считая от вершины C_1.

б) Найдите косинус угла между плоскостями LKA_1 и $A_1B_1C_1$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+4,2}+\frac{1}{\sqrt{x+4,2}}\geq\frac{5}{2}$.

16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

17. 31 декабря 2014 года Евгений взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Евгений переводит очередной транш. Евгений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 540 тыс. рублей, во второй 649,6 тыс. рублей. Найдите a.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\log_5\left(x^2\right)-a\right|-\left|\log_5 x+2a\right|=\left(\log_5 x\right)^2$ имеет ровно четыре решения.

19. В результате опроса выяснилось, что примерно 58% опрошенных предпочитают искусственную ёлку натуральной (число 58 получено с помощью округления до целого числа). Из этого же опроса последовало, что примерно 42% респондентов никогда не отмечали Новый год не дома.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 40 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 48 человек?

в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 20

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

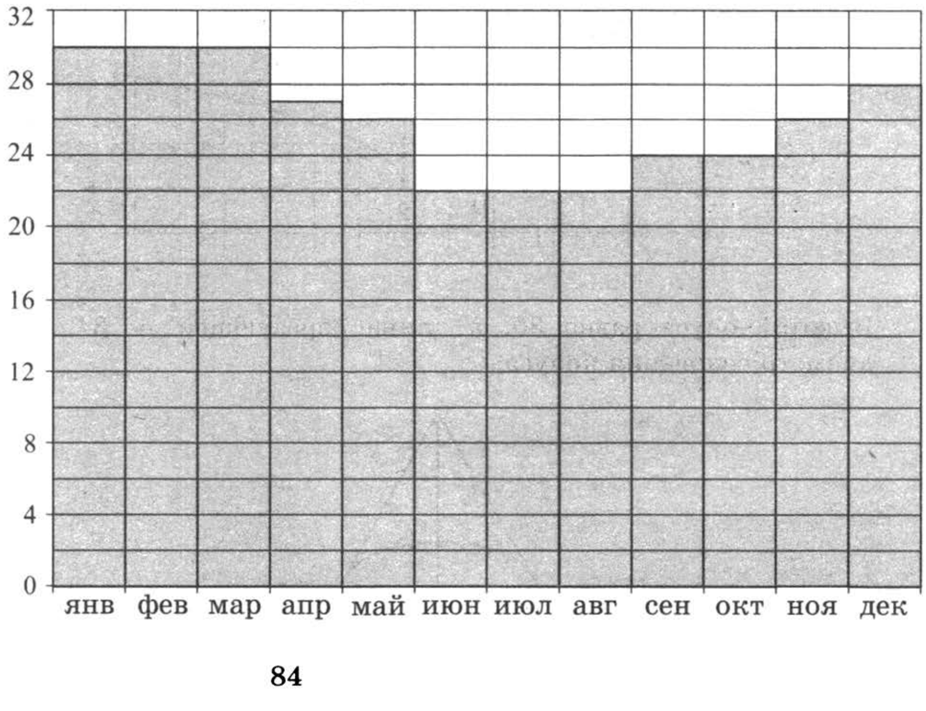
Часть 1

1 ☐

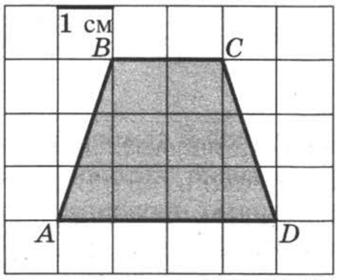
1. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 11% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,32 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 5 кг в течение суток?

2 ☐

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячной температурой в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



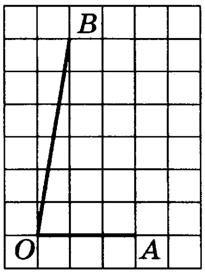
3. Найдите площадь трапеции $ABCD$. Размер каждой клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



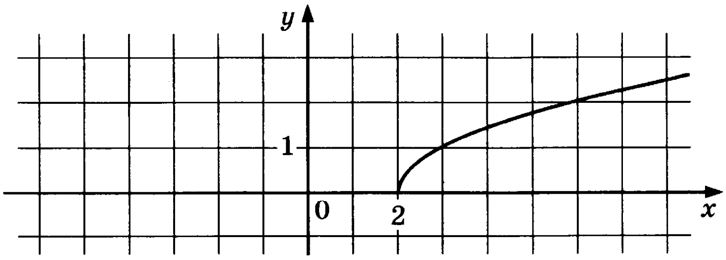
4. В среднем из 1800 садовых насосов, поступивших в продажу, 18 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

5. Найдите корень уравнения $2^{\log_{16}(9x+4)} = 5$.

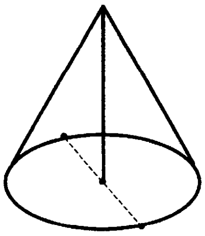
6. Найдите тангенс угла AOB, изображённого на клетчатой бумаге.



7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



8. Высота конуса равна 30, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.



Часть 2

9. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (0;\ 0,5\pi)$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$— постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21}$ м^2, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

11. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Трубы начали наполнять баки одновременно. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ -\pi]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 5$.

а) Найдите длину отрезка A_1K, где K — середина ребра BC.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

15. Решите неравенство $9^{x-2} - 37 \cdot 3^{x-3} + 30 \le 0$.

16. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» – 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\log_{0,5}\left(x^2\right)-a\right|-\left|\log_{0,5}x+2a\right|=\left(\log_{0,5}x\right)^2$ имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

19. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6d$?

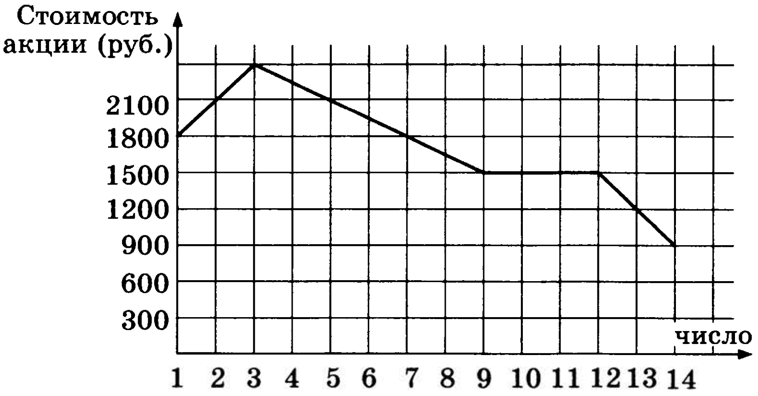
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 21

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

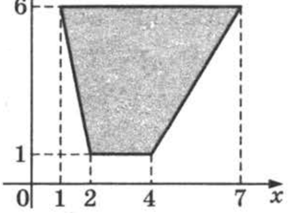
Часть 1

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 220 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3. Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 6), (7; 6), (4; 1), (2; 1).



4. В среднем из 150 карманных фонариков — три неисправных. Найдите вероятность купить работающий фонарик.

☐ 4

5. Найдите корень уравнения $x^2 - 15 = (x - 15)^2$.

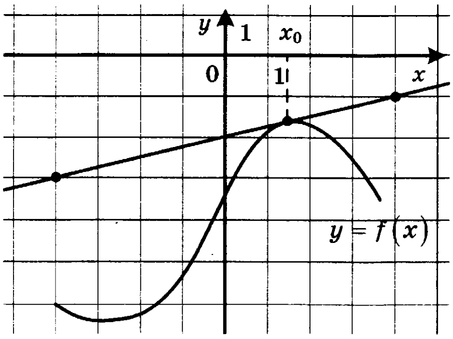
☐ 5

6. Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 7, а расстояние от точки B до прямой l равно 13. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

☐ 6

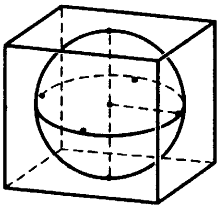
7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

☐ 7



8. Шар, объём которого равен 14π, вписан в куб. Найдите объём куба.

☐ 8



Часть 2

9. Вычислите значение выражения $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$.

☐ 9

10. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой температуре нагревателя T_1 КПД двигателя будет 15%, если температура холодильника $T_2 = 340°$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

☐ 10

11. Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

☐ 11

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 2\cos x - 11x + 7$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

☐ 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра C_1D_1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку B перпендикулярно прямой AK, пересекает отрезок A_1K.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC.

15. Решите неравенство $x^3 + 6x^2 + \dfrac{28x^2 + 2x - 10}{x - 5} \leq 2$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|10 \cdot 0,2^{1-x} - a\right| - \left|5^x + 2a\right| = 0,04^{-x}$ имеет ровно два неотрицательных решения.

19. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 667$?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 22

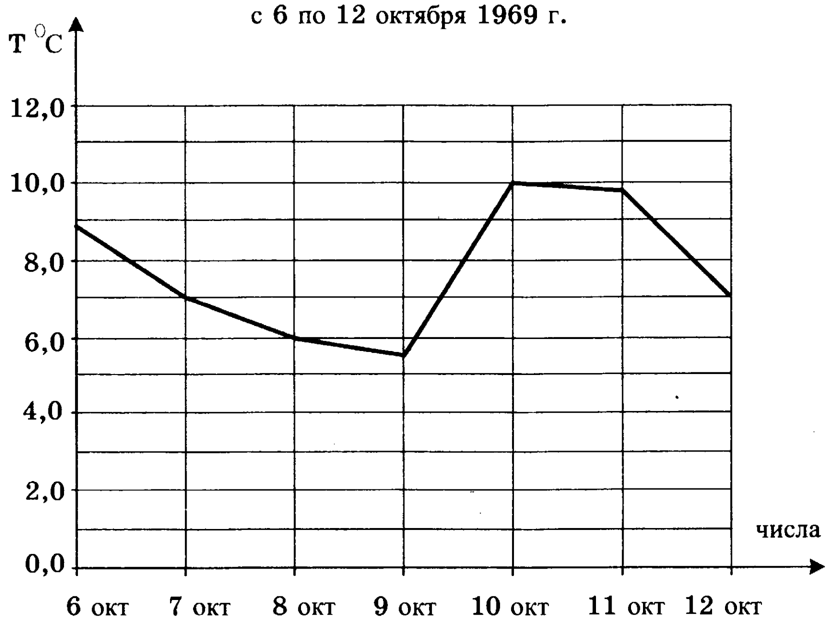
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

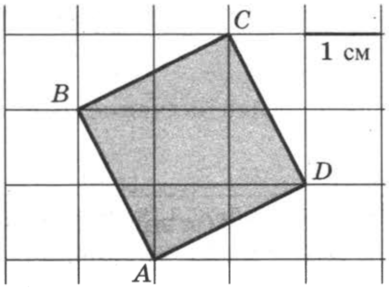
1. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 руб. 80 коп. 1 ноября счётчик электроэнергии показывал: 12 625 киловатт-часов, а 1 декабря — 12 802 киловатт-часа. Сколько рублей нужно заплатить хозяину квартиры за электроэнергию за ноябрь?

2. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Среднесуточная температура в Саратове
с 6 по 12 октября 1969 г.



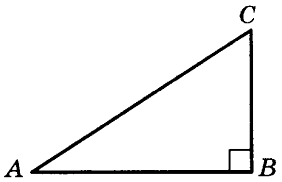
3. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



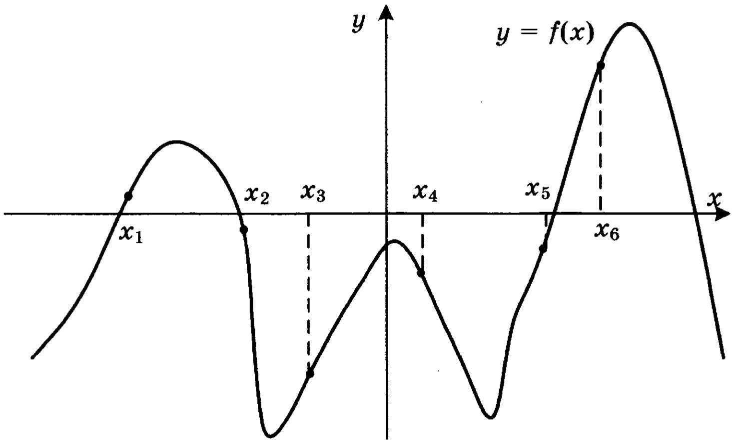
4. В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,4. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

5. Решите уравнение $3^{x-3} = 27$.

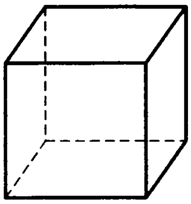
6. Один острый угол прямоугольного треугольника на 30° больше другого. Найдите больший острый угол.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.



8. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в семь раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_2 7 \cdot \log_7 4$.

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 313,6 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

11. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 - 18x^2 + 81x + 73$$

на отрезке $[0;\ 7]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое рёбро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении 1 : 2, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

15. Решите неравенство $4^{x-3} - 71 \cdot 2^{x-6} + 7 \le 0$.

16. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 177,75 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{a + x^2 + 2\log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)}$$

состоит из одной точки, найдите это решение.

19. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{13}{7}$?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 23

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

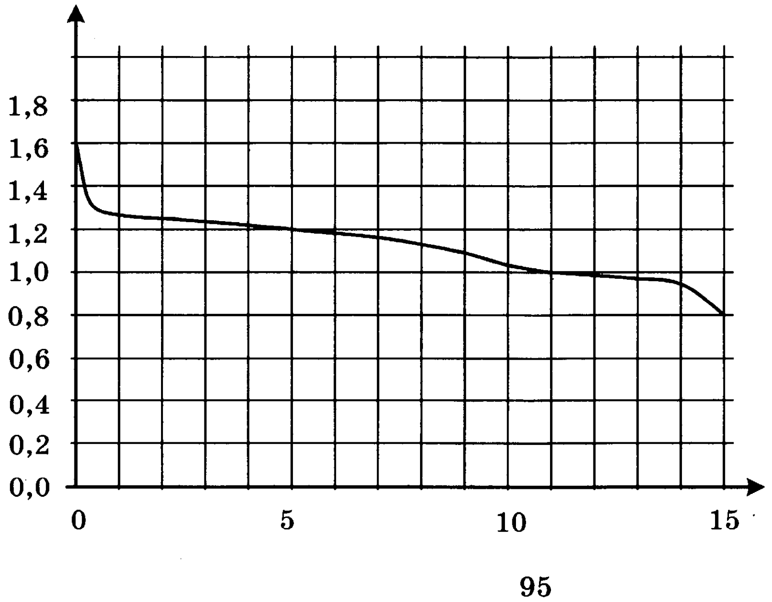
Часть 1

1. По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 18 рублей. Если на счету осталось меньше 18 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счету было 500 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

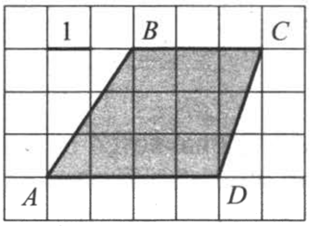
☐ 1

2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 15 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.

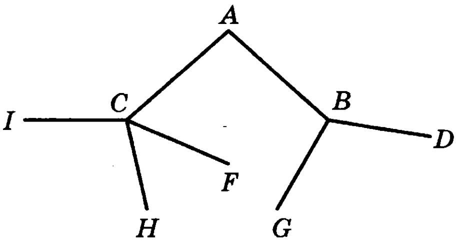
☐ 2



3. Найдите площадь трапеции $ABCD$, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).

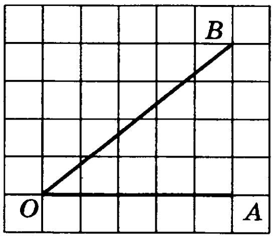


4. Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G.

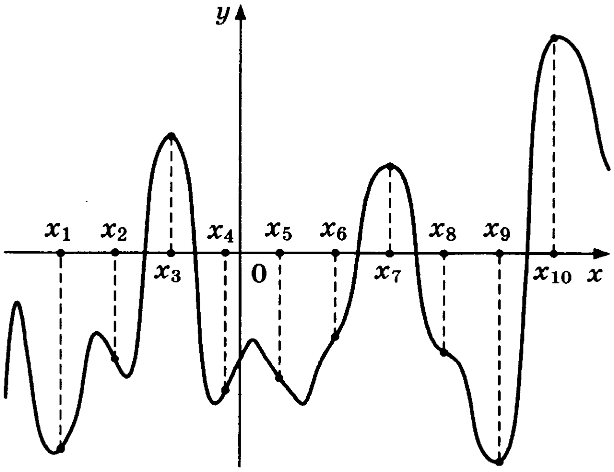


5. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}(5-x)=-2$.

6. Найдите тангенс угла AOB, изображённого на клетчатой бумаге.



7. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна?



8. Бетонный шар весит 0,5 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

☐ 8

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{60}{6^{\log_6 5}}$.

☐ 9

10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}\cdot 100\ \%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет 80%, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

☐ 10

11. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

☐ 11

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 13x - 13\mathrm{tg}\, x - 18$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

☐ 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5\cdot 4^{x^2+4x} + 20\cdot 10^{x^2+4x-1} - 7\cdot 25^{x^2+4x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.

☐ ☐ 13

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

☐ 14

15. Решите неравенство $x + \frac{20}{x+6} \geq 6$.

☐ 15

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 14$, $BC = 16$ и $\angle ACB = 150°$.

17. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\frac{6k-(2-3k)\cos t}{\sin t - \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

19. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{3}{2}$?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{5}{4}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18?

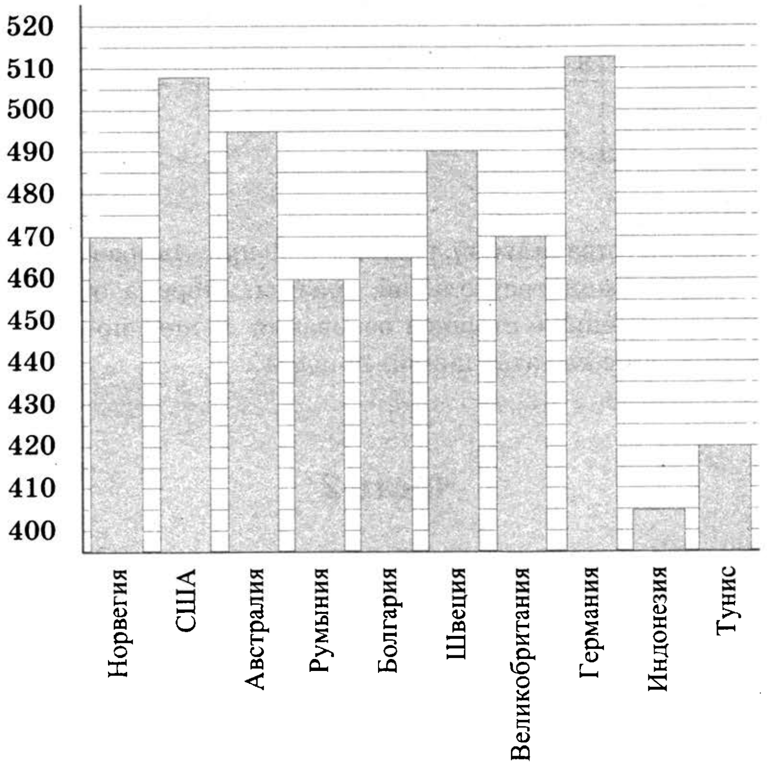
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 24

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

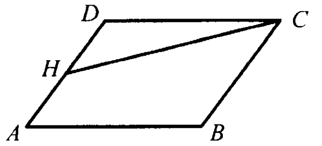
Часть 1

1. Цена на принтер была понижена на 20% и составила 4800 рублей. Сколько рублей стоил принтер до понижения цены?

2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран третье место принадлежит Австралии. Определите, какое место занимает Тунис.



3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3. Точка H — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $AHCB$.

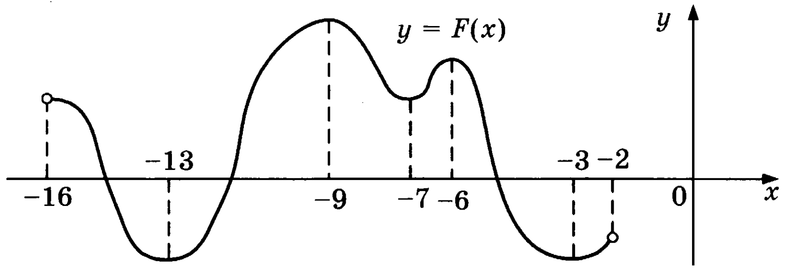


4. По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,94. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{36}\right)^{x-2}=6$.

6. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21°, угол CAD равен 30°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображён график первообразной $y=F(x)$ некоторой функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-16;-2)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-15;-8]$.

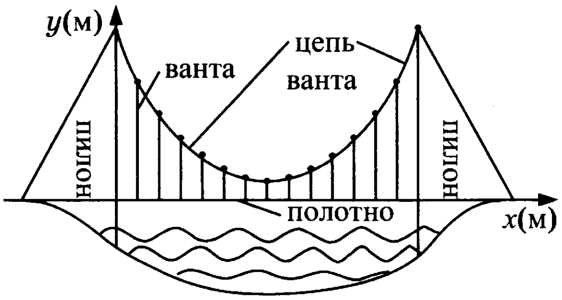


8. Объём данной правильной треугольной призмы равен 80. Найдите объём правильной треугольной призмы, сторона основания которой в 4 раза меньше стороны основания данной призмы, а высота в 4 раза больше высоты данной призмы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{18}{3^{\log_3 2}}$.

10. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0021x^2 - 0{,}47x + 31$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



11. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 4x - \cos 2x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.

б) Найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C.

15. Решите неравенство $x^3 + 5x^2 + \dfrac{28x^2 + 5x - 30}{x - 6} \le 5$.

16. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM : MB = 3 : 1$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD = 2\sqrt{2}$.

17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» – 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$$

не имеет корней.

19. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки?

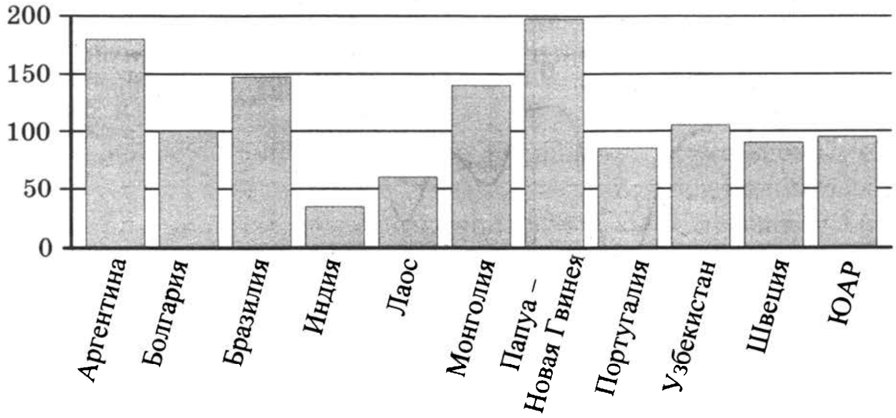
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 25

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

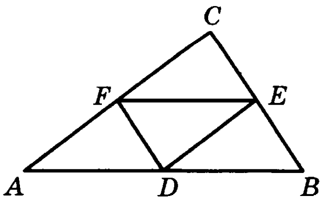
Часть 1

1. В доме, в котором живёт Женя, один подъезд. На каждом этаже по восемь квартир. Женя живёт в квартире 87. На каком этаже живёт Женя?

2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Узбекистан?



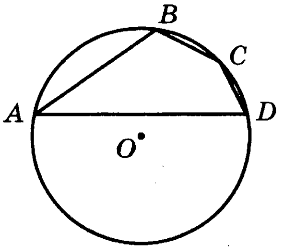
3. Точки D, E, F — середины сторон треугольника ABC. Периметр треугольника DEF равен 5. Найдите периметр треугольника ABC.



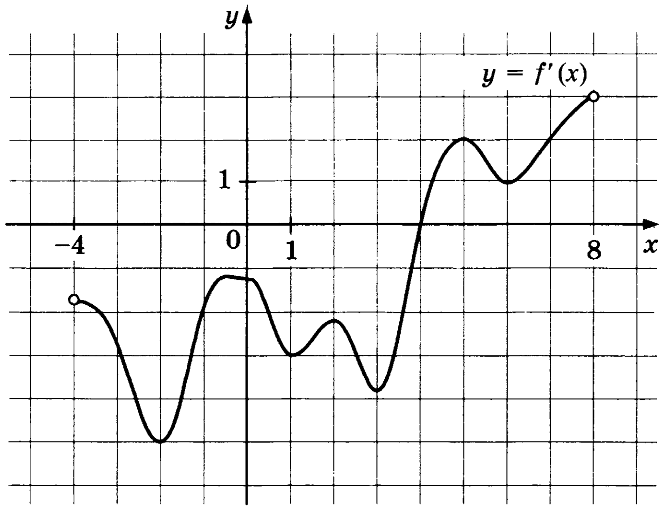
4. В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{9x+2}=\frac{1}{8x-4}$.

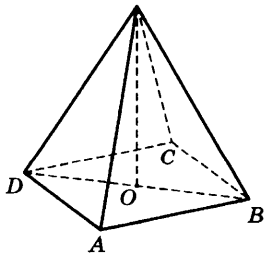
6. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 25°. Найдите угол C четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 10$, $BD = 16$. Найдите длину отрезка SO.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-\dfrac{22}{\cos^2 34^\circ + \cos^2 124^\circ}$.

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,4} = \text{const}$, где p (атм) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 256 л, а его давление равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде поднялось до 128 атмосфер? Ответ выразите в литрах.

11. Плиточник должен уложить 300 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 5 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 5 дней раньше, чем наметил. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

12. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x^2+49}{x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

14. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC.

а) Докажите, что высота пирамиды проведённая из точки A, делится плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC и SA, пополам.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.

15. Решите неравенство $\log^2_{|x+1|}(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \le 22$.

16. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.

17. Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Тимофей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тысяч рублей?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

19. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 26

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

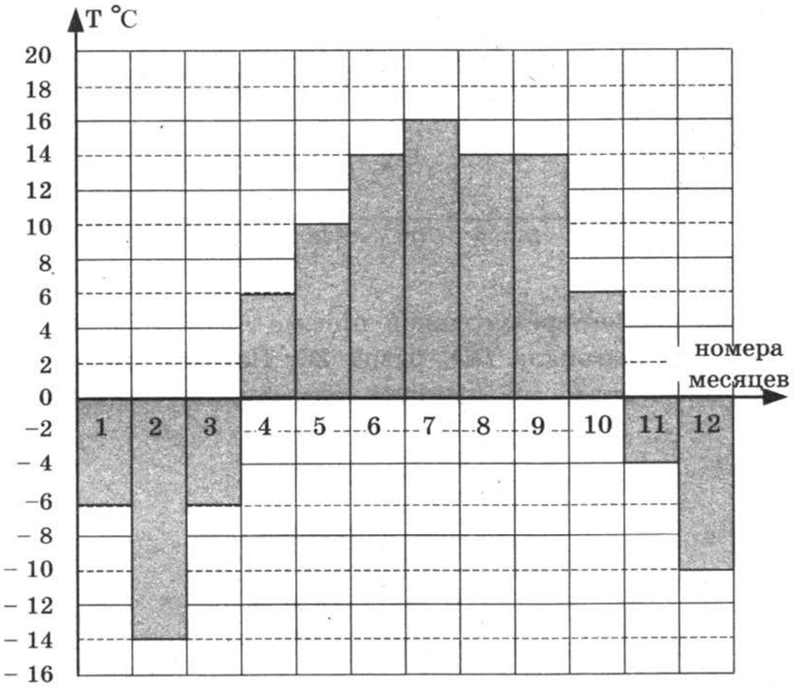
Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 13 920 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

1

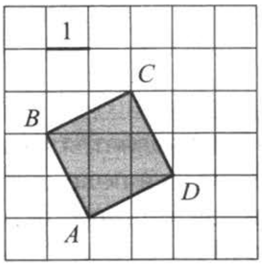
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

2



3 ☐

3. Найдите площадь квадрата $ABCD$, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



4 ☐

4. В каждой двадцать пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Коля покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Коля не найдёт приз в своей банке.

5 ☐

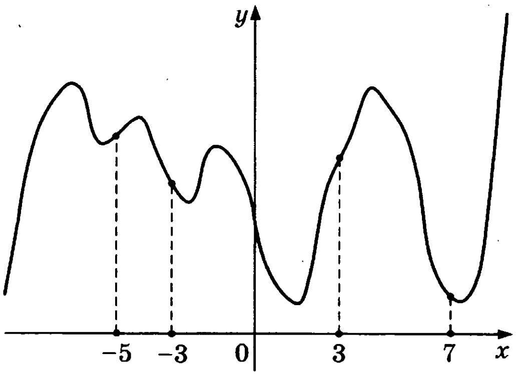
5. Найдите корень уравнения $(x+7)^3 = 216$.

6 ☐

6. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите величину тупого угла ромба. Ответ дайте в градусах.

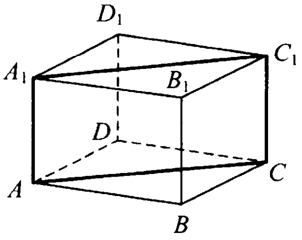
7 ☐

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки −5, −3, 3, 7. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



8 ☐

8. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AA_1 равно 10, а диагональ BD_1 равна 26. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и C.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.

10. К дну высокого цилиндрического резервуара приварена трубка с краном. После открытия крана вода начинает вытекать из резервуара, при этом высота столба воды (в метрах) меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{800}$ — отношение площадей сечений трубки и резервуара, а $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Через сколько секунд после открытия крана в резервуаре останется четверть первоначального объёма воды?

11. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 90 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 5 часов 24 минуты позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 6x^2 + 19$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $7\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно $2\sqrt{197}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите неравенство $\left(\log_2(x+4,2)+2\right)\left(\log_2(x+4,2)-3\right)\geq 0$.

16. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 25 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 39% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^6+(5a-8x)^3+3x^2+15a=24x$$

не имеет корней.

19. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 27

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

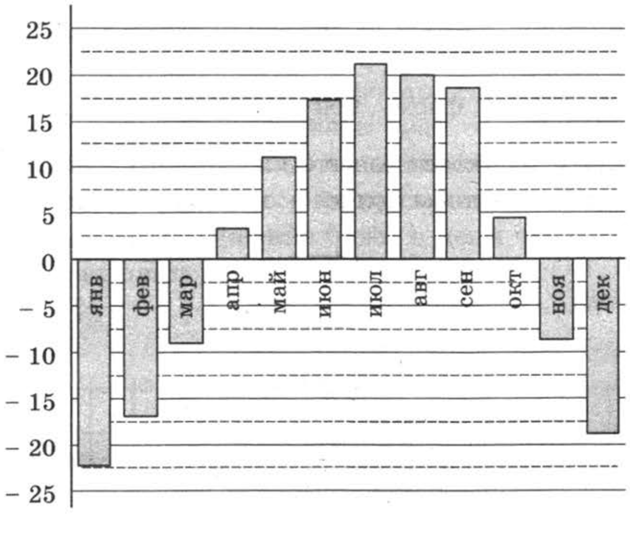
Часть 1

1. Для покраски потолка требуется 140 г краски на 1 м^2. Краска продаётся в банках по 3 кг. Какое наименьшее количество банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 42 м^2?

☐ **1**

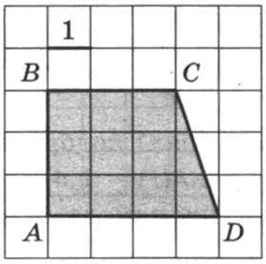
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Хабаровске по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда среднемесячная температура в Хабаровске отрицательна.

☐ **2**



3. Найдите площадь трапеции *ABCD*, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).

☐ **3**

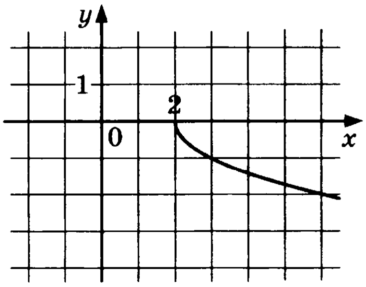


4. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

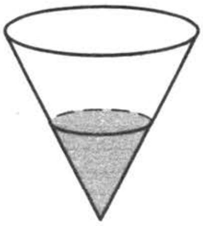
5. Решите уравнение $\log_{25}(2 - 3x) = 0{,}5$.

6. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 45° и 67°. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины C. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1;\ 1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 3. Найдите $f'(3)$.



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 25 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

10. Высоту над землей (в метрах) подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t) = 1{,}4 + 14t - 5t^2$, где t — время в секундах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 8 метров?

11. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

12. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 12x^2 + 15$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin(\pi + x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.

15. Решите неравенство $\log_{5-x}\frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4$.

16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 3 и 2.

17. 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите a.

18 ☐

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + 4x^2 = (3x + 5a)^3 + 6x + 10a$$

не имеет корней.

19 ☐

19. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 46, а вместе солдат меньше, чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

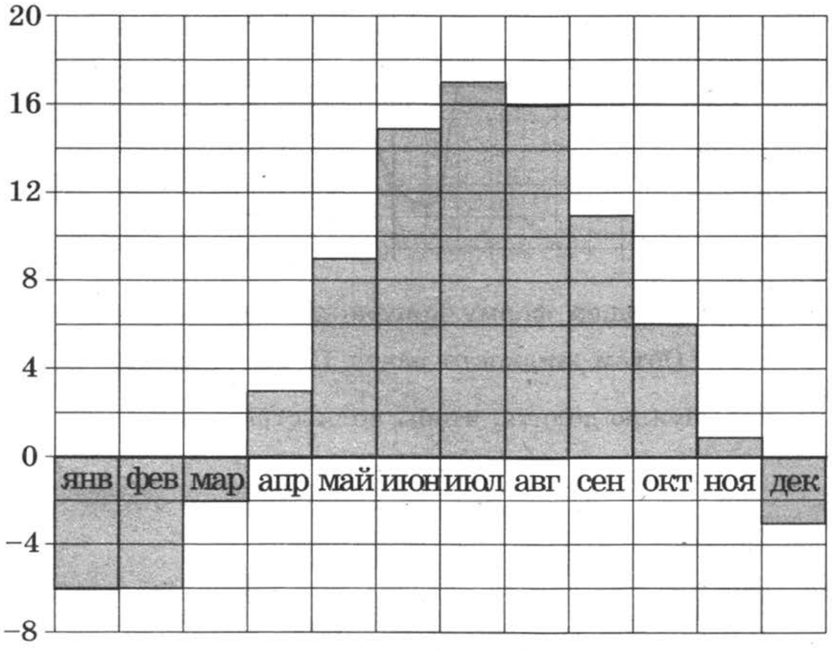
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 28

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

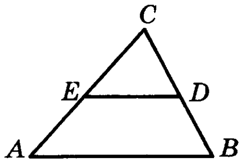
Часть 1

1. В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. При желании покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 15% от стоимости самой мебели. Во сколько рублей обойдётся кухонный шкаф вместе со сборкой, если без сборки он продаётся за 3200 руб.?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была отрицательная.



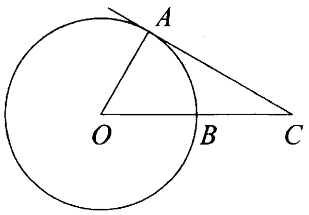
3. Площадь треугольника ABC равна 28. DE — средняя линия. Найдите площадь трапеции $ABDE$.



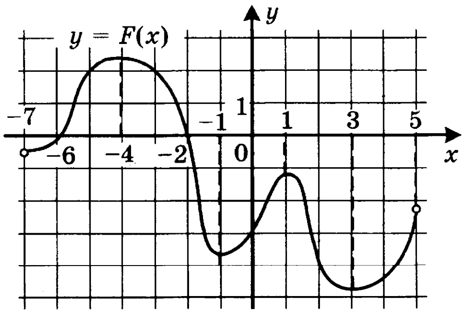
4. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

5. Решите уравнение $2^{5-x} = 0{,}25$.

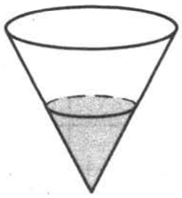
6. Угол ACO равен 34°, где O — центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Сторона CO пересекает окружность в точке B (см. рис.). Найдите величину меньшей дуги AB окружности. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 2]$.



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 12 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{5\sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.

10. Компания Яндекс-Маркет вычисляет рейтинг интернет-магазинов по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^{\frac{0,02K}{r_{\text{пок}}+0,1}}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами компании (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Эпсилон», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,61.

11. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 2x + 17}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости AA_1D_1 и DB_1F_1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

15. Решите неравенство $\log_{x-3}(x^2 - 12x + 36) \le 0$.

16 ☐

16. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 4 и 3. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

17 ☐

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за последние 12 месяцев нужно выплатить банку 1597,5 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18 ☐

18. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=|x-a|-x^2$ не меньше 1.

19 ☐

19. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 29

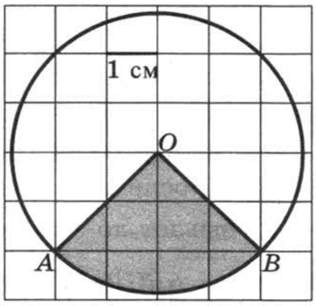
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Пакет молока стоит 21 рубль 30 копеек. Какое наибольшее количество пакетов молока можно купить на 500 рублей?

2. Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее +6 °C. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха на первые три недели апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев петрушки.

3. Найдите площадь S сектора. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$. Размер каждой клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

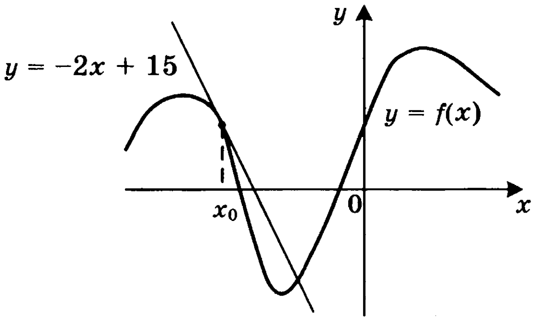


4. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 56 шашистов, среди которых 12 участников из России, в том числе Валерий Стремянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Валерий Стремянкин будет играть с каким-либо шашистом из России.

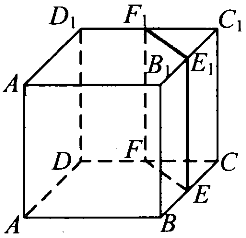
5. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

6. Отрезок *AB* является хордой окружности с центром *O*. Найдите угол между прямой *AB* и касательной к окружности, проходящей через точку *A*, если угол *AOB* равен 56°. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0. Касательная задана уравнением $y = -2x + 15$. Найдите значение производной функции $y = -\frac{1}{4}f(x) + 5$ в точке x_0.



8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер BC, DC, B_1C_1 и D_1C_1 соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1, равен 14. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(558^2 - 23^2) : 581$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 22$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}7$ — посто-

янная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 27,2 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

11. **В сосуд, содержащий 7 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 8 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?**

12. **Найдите наибольшее значение функции**

$$y = (21 - x)e^{x-20}$$

на отрезке [19; 21].

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. **Решите уравнение**

$$\frac{\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)\log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}\left(\sqrt{2}\cos x\right)} = 0.$$

14. **В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 4. Точка L — середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.**

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

15. **Решите неравенство** $\frac{2x^2 - 10x + 6}{x - 5} \le x$.

16. **Окружность с центром O вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.**

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{3}$.

17 ☐

17. В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

18 ☐

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\dfrac{x^2+x-2a}{x+a}-1\right| \le 2$ не имеет решений на интервале (1; 2).

19 ☐

19. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 30

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

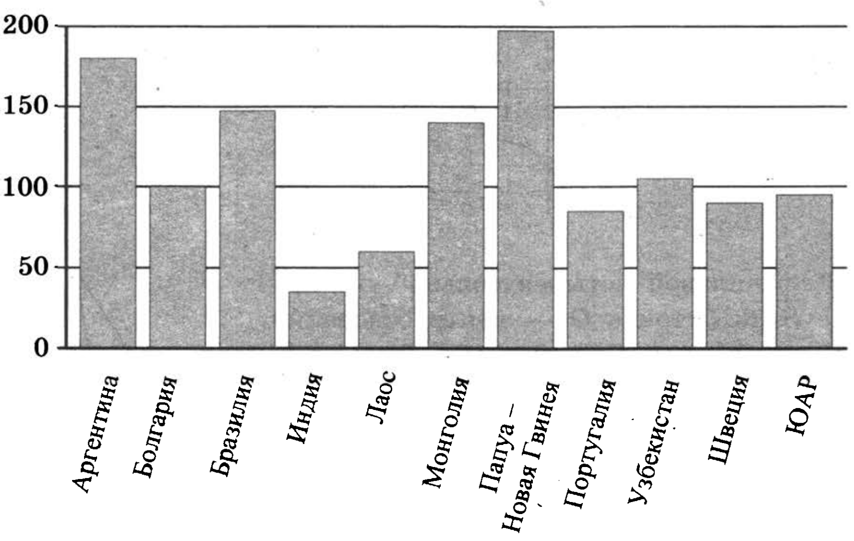
Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2500 руб. До установки счётчиков Александр платил за воду (холодную и горячую) ежемесячно 1700 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1000 руб. при тех же тарифах на воду. За какое наименьшее количество месяцев при тех же тарифах на воду установка счётчиков окупится?

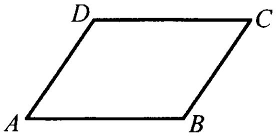
1

2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Аргентина?

2



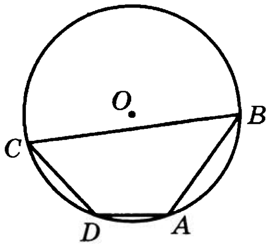
3. Периметр параллелограмма равен 70. Меньшая сторона равна 16. Найдите большую сторону параллелограмма.



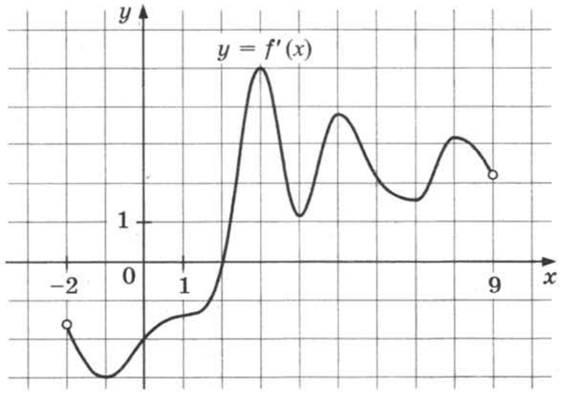
4. В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 5 из них встречается вопрос по теории вероятностей. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теории вероятностей.

5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x+7}=\frac{1}{3x+20}$.

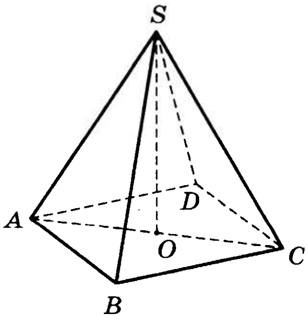
6. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 125° и 47°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график производной $y=f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале (−2; 9). В какой точке отрезка [3; 8] функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 20$, $AC = 24$. Найдите длину отрезка SO.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{34}{\cos^2 101^\circ + \cos^2 191^\circ}$.

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,4} = \mathrm{const}$, где p (атм) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 24 л, а его давление равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде поднялось до 128 атмосфер? Ответ выразите в литрах.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 24 минуты. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x^2 + 25}{x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

14. В пирамиде $SABC$ в основании лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, $SA = SC = \sqrt{33}$, $SB = 7$. Точка O — основание высоты пирамиды, проведённой из вершины S.

а) Докажите, что точка O лежит вне треугольника ABC.

б) Найдите объём четырёхугольной пирамиды $SABCO$.

15. Решите неравенство $\log_{x+1}(x-1) \cdot \log_{x+1}(x+2) \le 0$.

16. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 5 и 3. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

17. В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 7000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 2000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\left|\frac{x^2-6x+a}{a-2x}-2\right| \le 1$ справедливо при всех значениях x из отрезка $[0; 1]$.

19. Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{12}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>2d$?

ГЛАВА II. ЗАДАНИЯ ЧАСТИ 2

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ

1. Рациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения

1.1. $x^2 = 9$.

1.2. $(x^2 - 2x + 1)^2 = 1$.

1.3. $(x+1)^2 = (2x+5)^2$.

1.4. $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

1.5. $3x^2 - 7x + 5 = 0$.

1.6. $x^2 - 2011x + 2010 = 0$.

1.7. $x^2 - 2010x - 2011 = 0$.

1.8. $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$.

1.9. $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

1.10. $3x^6 + 7x^3 - 6 = 0$.

1.11. $(x-1)^4 - 8(x-1)^2 - 9 = 0$.

1.12. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$.

1.13. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$.

1.14. $\frac{x^2 + x}{2x^2 + 2x} = \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x}$.

1.15. $\frac{2x^2 + x + 2}{4x^2 + 5x - 14} = \frac{2x^2 + x + 6}{4x^2 + 5x - 10}$.

1.16. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 24$.

1.17. $(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) = 1680$.

1.18. $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{48}{(x-1)^2} = 10\left(\frac{x-1}{3} - \frac{4}{x-1}\right)$.

Решите неравенства

1.19. $2x^2 - 7x + 5 \le 0$.

1.20. $3x^2 + 7x - 6 > 0$.

1.21. $x^2 - 2011x + 2010 < 0$.

1.22. $x^2 + 2012x + 2011 \ge 0$.

1.23. $2x^2 - 6x + 5 \ge 0$.

1.24. $3x^2 - 9x + 7 \le 0$.

1.25. $4x^2 - 12x + 9 \le 0$.

1.26. $2x^4 - 7x^2 + 5 < 0$.

1.27. $x^4 + x^2 - 12 \le 0$.

1.28. $3x^6 + 7x^3 - 6 > 0$.

1.29. $\frac{5x+4}{3x-1} < 0$.

1.30. $\frac{2x+3}{3x+5} > 0$.

1.31. $(x-1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

1.32. $\frac{(x-2)(x+1)^2}{-x} < 0$.

1.33. $\frac{x}{x^2 + 3x - 4} < 0$.

1.34. $\frac{(x+1)x^2}{5x - x^2} \ge 0$.

1.35. $\dfrac{x^2+1}{x-1-x^2}<0$.

1.36. $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+x+1}\ge 0$.

1.37. $\dfrac{3x^2+1}{x^2+5x+6}\ge 0$.

1.38. $\dfrac{2x^2+21x+40}{x^2+3}\ge 0$.

1.39. $\dfrac{x^2+14x+49}{2x^2-x-1}>0$.

1.40. $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30}>0$.

1.41. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-5x-6}<0$.

1.42. $\dfrac{x^2-10x+25}{5-4x-x^2}\ge 0$.

1.43. $\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-6x+9}\ge 0$.

1.44. $\dfrac{(2-(x+1)^2)(x-4)^2}{x(x^2-x-6)}\ge 0$.

1.45. $\dfrac{1}{2-x}\le 2$.

1.46. $\dfrac{x-1}{x+3}>2$.

1.47. $\dfrac{5x+1}{x^2+3}>-1$.

1.48. $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$.

1.49. $\dfrac{1-x}{(x+1)^2}<1$.

1.50. $x+\dfrac{60}{x}\ge 17$.

1.51. $\dfrac{x^2+1}{x}<\dfrac{1}{x}+1$.

1.52. $\dfrac{x-1}{x+1}<x$.

1.53. $x\ge\dfrac{6}{x+5}$.

1.54. $\dfrac{x+6}{x-6}+\dfrac{3x-2}{2}\ge 0$.

1.55. $2+\dfrac{3}{x}>\dfrac{2}{x-1}$.

1.56. $\dfrac{4x}{x+3}>x+1$.

1.57. $\dfrac{2x^2+3x-459}{x^2+1}>1$.

1.58. $\dfrac{3}{2-x^2}\le 1$.

1.59. $\dfrac{1}{x}<\dfrac{x^2+1}{x}+1$.

1.60. $\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{7}{x}+1<0$.

1.61. $\dfrac{9}{(x+2)^2}\ge 1$.

1.62. $(x-1)^4-15(x-1)^2-16>$

1.63. $\dfrac{x^2+3x+24}{x^2+3x+3}<4$.

1.64. $-2<\dfrac{x^2+2}{1-x^2}$.

1.65. $\dfrac{3x-2}{x^2+6x}>\dfrac{1}{2}$.

1.66. $\dfrac{5+2x}{3x^2+2x-16}<1$.

1.67. $\dfrac{1}{x^2+5x+6}\ge\dfrac{1}{2}$.

1.68. $\dfrac{1}{x^2-8x-9}\ge\dfrac{1}{3x^2+5x+2}$

1.69. $\frac{19+33x}{7x^2+11x+4} > 2$.

1.70. $\frac{4}{x}+\frac{2}{2-x} < 1$.

1.71. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x} > \frac{1}{x+1}$.

1.72. $\frac{7}{x(x+1)}+\frac{9}{x}+1 < 0$.

1.73. $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} > 1$.

1.74. $(x^2-3x+1)(x^2-3x-3) \geq 5$.

1.75. $(x^2+2x)(2x+2)-9\cdot\frac{2x+2}{x^2-2} \geq 0$.

1.76. $\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x}$.

1.77. $\frac{7}{x^2+5x+6}-\frac{9}{x+3}+1 \leq 0$.

1.78. $\frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{x-6}} \geq 0$.

1.79. $-2 < \frac{x^2+2}{1-x^2}\ \frac{3}{x-1} < 1$.

1.80. $\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{8}-\frac{15}{88+32x}\right)^2 \geq 1$.

2. Иррациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения

2.1. $(x^2-1)\sqrt{5x-1}=0$.

2.2. $\sqrt{8-3x^2}=1$.

2.3. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}=0$.

2.4. $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}$.

2.5. $\sqrt{12-x}=x$.

2.6. $x-\sqrt{x-1}=3$.

2.7. $\sqrt{7+x}+x+1=0$.

2.8. $\sqrt{4+4x+x^2}+x=4$.

2.9. $\sqrt{2x^2+21x+4}=2+11x$.

2.10. $\sqrt{3x^2+25x+51}=7+2x$.

2.11. $\frac{\sqrt{2x+1}+1}{x}=1$.

2.12. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-6=0$.

2.13. $\sqrt{3-x}+\frac{4}{\sqrt{3-x}+3}=2$.

2.14. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{3}{2}$.

2.15. $2x^2-3x-\sqrt{2x^2-3x+9}+3=0$.

2.16. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{4-x}=1$.

2.17. $\sqrt{4+x}-\sqrt{5-x}=3$.

2.18. $\sqrt{13-4x}=\sqrt{12-3x}-\sqrt{1-x}$.

2.19. $\sqrt{x^4+2x-5}=1+x$.

2.20. $\sqrt{13-x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x}$.

2.21. $\sqrt{x}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+7}-1}$.

2.22. $\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)(x+1)}-\sqrt{x^3}=0$.

2.23. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}=x-7$.

2.24. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+33}-\sqrt{x+6}$.

2.25. $\sqrt{3x^2-5x+8}-\sqrt{3x^2-5x+1}=1$.

2.26. $\sqrt{1-x\sqrt{x^2-24}}+x+1=0$.

2.27. $\sqrt[3]{1-x}=1-\sqrt{x}$.

2.28. $6\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-1}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-1)}$.

2.29. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

2.30. $(5x+2)\sqrt{1-x}+(5x-7)\sqrt{x}=0$.

Решите неравенства

2.31. $x\cdot\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$.

2.32. $\sqrt{\dfrac{x-3}{3-2x}}>-1$.

2.33. $\sqrt{3x-4}>\sqrt{4-x}$.

2.34. $\sqrt{x^2-2x-3}<1$.

2.35. $\sqrt{x^2}+x<1$.

2.36. $0<x+\sqrt{2-x}$.

2.37. $0<x+\sqrt{x+2}$.

2.38. $x<\sqrt{x+30}$.

2.39. $\sqrt{2x-1}<x-2$.

2.40. $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$.

2.41. $3+x>3\sqrt{1-x^2}$.

2.42. $\sqrt{(x+1)(x-10)}>x$.

2.43. $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$.

2.44. $\dfrac{3}{\sqrt{2+x}}<\sqrt{2+x}+2$.

2.45. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}<\dfrac{3}{2}$.

2.46. $3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}>1$.

2.47. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}<0$.

2.48. $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-1}$.

2.49. $\sqrt{7x-6}-\sqrt{3x-16}>\sqrt{5x-22}$.

2.50. $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+x+1}<1$.

2.51. $\sqrt{1+x}\le\sqrt[4]{5-x}$.

2.52. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\ge 2$.

2.53. $\sqrt{2-\sqrt{x}}<\sqrt{x+1}$.

2.54. $x+4+\dfrac{x^2}{(1+\sqrt{x-1})^2}>0$.

2.55. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$.

2.56. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2$.

2.57. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2-7x}>3$.

2.58. $x^2\ge x\cdot(2+\sqrt{12-2x-x^2})$.

2.59. $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$.

2.60. $\sqrt{x+3}-\sqrt{-x-1}<1+\sqrt{(x+3)(-x-1)}$.

3. Уравнения и неравенства с модулем

Решите уравнения

3.1. $|x+2|=x+2$.

3.2. $|x-2|=2(3+x)$.

3.3. $|3x+2|=x+11$.

3.4. $|1-x^2|=15$.

3.5. $|2x-5|=5-2x$.

3.6. $x^2+|x|-6=0$.

3.7. $(x-5)^2-|x-5|=30$.

3.8. $x^2+6x+8+|x+4|=0$.

3.9. $3|x+2|+x^2+6x+2=0$.

3.10. $|1-5x^2|=4$.

3.11. $|x-4|=|5-2x|$.

3.12. $|x^2+13x+35|=|35-x^2|$.

3.13. $|2x-8|-|x+5|=12$.

3.14. $|x|-|x+2|=2$.

3.15. $|5x+3|+|2x+1|=|7x+4|$.

3.16. $|x|-2|x-1|+3|x-2|=0$.

3.17. $2|x-6|-|x|+|x+6|=18$.

3.18. $||||x+1|+2|-1|+1|=2$.

3.19. $|2x+15|=22-|2x-7|$.

3.20. $|x^2+2x-1|=\dfrac{1-5x}{3}$.

Решите неравенства

3.21. $|2x+5|<1$.

3.22. $|3x+\dfrac{5}{2}|\geq 2$.

3.23. $|x^2+5x|<6$.

3.24. $2|x-1|\leq 4-x$.

3.25. $|x+1|>\dfrac{1-x}{2}$.

3.26. $|x+2|\leq|4-x|$.

3.27. $|x-1|-|x+4|>7$.

3.28. $|x-2|+x+\dfrac{3}{2}<|x+1|$.

3.29. $x^2-6|x|+8<0$.

3.30. $x^2-|x|-6\leq 0$.

3.31. $|x^2+2x|+x\leq 0$.

3.32. $|x+4|>x^2+7x+12$.

3.33. $x^2+5x+9\leq|x+6|$.

3.34. $3x^2+9x+2\geq|x+3|$.

3.35. $|x+6|>|x^2+5x+9|$.

3.36. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{|x|}\geq 2$.

3.37. $\dfrac{3}{|x+1|}\geq 5-2x$.

3.38. $\dfrac{|x-3|-1}{4-2|x-4|}\geq -1$.

3.39. $\dfrac{|2+x|+x}{|x+3|-1} \le 2.$

3.40. $\dfrac{|1-x|+10}{4|x-1|+3} > 2.$

3.41. $\dfrac{1}{|x+1|-1} \ge \dfrac{2}{|x+1|-2}.$

3.42. $|2x+4|-|3x-9|>|x+1|-6.$

3.43. $||x+1|-|x-1||<1.$

3.44. $|x^2+2x-3|+3x+3<0.$

3.45. $x^2-|5x+3|+x<2.$

3.46. $x^2+4 \ge |3x-2|+7x.$

3.47. $(|x+1|-3)(|x-2|-5)<0.$

3.48. $|x^2-x-2|+|x-4| \le x^2-2x+6.$

3.49. $|x^2+2x-8|+2x>0.$

3.50. $x^2-x-10<2|x+2|.$

3.51. $2x > \dfrac{5x+3}{|x+2|}.$

3.52. $\dfrac{|x-1|+|x+2|}{199-x}<1.$

3.53. $\dfrac{|x+2|}{|x+1|-1} \ge 1.$

3.54. $\dfrac{3}{|x-3|-1} \ge |x-2|.$

3.55. $\left|\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-x+1}\right|<3.$

3.56. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2+6x+9}<0.$

3.57. $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6} \ge 2.$

3.58. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x+3} \le 2x.$

3.59. $|x^3+1| \ge 1+x.$

3.60. $\left|\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4}\right| \le 1.$

4. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решите уравнения

4.1. $\sqrt{3}\sin x = 2.$

4.2. $\sin x = \dfrac{\pi}{6}.$

4.3. $\sqrt{2}\cos^2 5x = \cos 5x.$

4.4. $(2\sin 2x - \cos 2x)(1+\cos 2x) = \sin^2 2x.$

4.5. $\sqrt{3}\sin x - \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}x \cdot \sin x = \sqrt{3}.$

4.6. $2\cos 4x + \cos 2x = 1.$

4.7. $3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = 2\cos^2 x.$

4.8. $\dfrac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$

4.9. $\dfrac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0.$

4.10. $4\sin^4\dfrac{x}{2} + 12\cos^2\dfrac{x}{2} = 7.$

4.11. $3\mathrm{tg}^2 x + 7 = \dfrac{2}{\sin^2 x}.$

4.12. $\sin 3x + \sin x = \sin 2x.$

4.13. $\sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1.$

4.14. $3\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 0.$

4.15. $4\sin x \cdot \cos x - 3\sin^2 x = 1.$

4.16. $\cos x - \sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 1.$

4.17. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$

4.18. $6(\sin x + \cos x) - 2\sin x \cdot \cos x + 6 = 0.$

4.19. $\left(\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x\right)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right).$

4.20. $\cos 3x - \sin(9x - 2) = 0.$

4.21. $4\cos x - 3\sin x = 5.$

4.22. $\sin x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10} \cdot \cos x = 1.$

4.23. $2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x + \sin x.$

4.24. $\operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}x.$

4.25. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4) \cdot \operatorname{tg}x} = 2.$

4.26. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}x.$

4.27. $\dfrac{1 - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x} = (\sin x - \cos x)^2.$

4.28. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 7 - 5\operatorname{tg}2x.$

4.29. $\sin^4\frac{2x}{3} + \cos\frac{2x}{3} = \frac{5}{8}.$

4.30. $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}.$

4.31. $\dfrac{2\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 2.$

4.32. $\cos 2x \cdot (2\cos^2 2x - 1) = \frac{1}{4}.$

4.33. $2\sin^3 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

4.34. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x.$

4.35. $2\sin^8 x - 2\cos^8 x = \cos^2 2x - \cos 2x.$

4.36. $(3 - \operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x = 2(1 + \cos 2x).$

4.37. $\operatorname{tg}2x + \operatorname{ctg}x + 4\cos^2 x = 0.$

4.38. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos x\right) + \operatorname{ctg}(\pi\sin x) = 0.$

4.39. $\operatorname{tg}3x = \left(2 + \sqrt{3}\right)\operatorname{tg}x.$

4.40. $\operatorname{tg}2x \cdot \operatorname{tg}7x = 1.$

4.41. $\operatorname{tg}14x + 3\operatorname{ctg}7x + \sin 3x - 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}.$

4.42. $2\cos x - \sqrt{2}\sin 28x = 3\sqrt{2} - 2\cos 28x \cdot \sin x.$

4.43. $2\sin^2 x + \sin(x^2) = 1.$

4.44. $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x).$

4.45. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg}x) = \operatorname{ctg}(\pi\operatorname{ctg}).$

4.46. $1 + \arcsin x = 0.$

4.47. $2\arccos^2 x - 3\arccos x - 2 = 0.$

4.48. $\arcsin x = \arccos x.$

4.49. $\arcsin(x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos(x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{2}}).$

4.50. $\arcsin 2x = \arccos|x|.$

Решите неравенства

4.51. $\sin x > \frac{1}{2}$.

4.52. $\cos x \le -\frac{1}{2}$.

4.53. $\operatorname{tg} x < 1$.

4.54. $20 \sin^2 x + 9 \cos x < 21$.

4.55. $\operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} \ge 1$.

4.56. $2\cos^2 2x - (2+\sqrt{2})\cos 2x + \sqrt{2} > 0$.

4.57. $6 \sin x \cdot \cos x > \sin x + \cos x + 1$.

4.58. $\sin(\sin x) + \sin x \cdot \cos(\sin x) > 0$.

4.59. $2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) \le 0$.

4.60. $\arcsin(\sin x) + 3 \arccos(\cos x) \ge 3x - 18$.

5. Показательные уравнения и неравенства

Решите уравнения

5.1. $5^{x^2+6x+8} = 1$.

5.2. $(2/5)^{6x-7} = (5/2)^{14x-3}$.

5.3. $0{,}125 \cdot 2^{-4x-16} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^x$.

5.4. $2^{3+2x} = 4^{1-x^2-3x}$.

5.5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{4\sqrt{x}} = (2{,}25)^{2\sqrt{x}-4}$.

5.6. $5\sqrt{5}(0{,}2)^{x+0{,}5} = (0{,}04)^x$.

5.7. $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{64} = 8^{x-1}$.

5.8. $32^{(x+8)/(x-4)} = 0{,}25 \cdot 128^{(x+20)/x}$.

5.9. $5^{x+1} = 5^{x-1} + 24$.

5.10. $7^{x+1} - \frac{1}{7} 7^x + 2 \cdot 7^{x-1} - 14 \cdot 7^{x-2} = 48$.

5.11. $3^{2x-1} - 9^x + 27^{(2x+2)/3} = 675$.

5.12. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

5.13. $4^{-2/x} - 5 \cdot 2^{-2/x} + 4 = 0$.

5.14. $2^{2+x} + 2^{2-x} = 17$.

5.15. $2^{x+1} \cdot 5^x = 10^{x+1} \cdot 5^{x+2}$.

5.16. $2^x \cdot 5^{x-1} = 200$.

5.17. $2^{(x^2-6)} \cdot 3^{(x^2-6)} = \frac{(6^{-x-1})^4}{6^5}$.

5.18. $(\log_3 8) \cdot (4/9)^x \cdot (27/8)^{x-1} = \log_3 4$.

5.19. $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 3^{x+2} + 3^x$.

5.20. $9^x - 5^x - 3^{2x} \cdot 15 + 5^{x+1} \cdot 3 = 0$.

5.21. $25^x - 7^x - 7 \cdot 5^{2x+1} + 5 \cdot 7^{x+1} = 0$.

5.22. $9^x + 6^x - 2 \cdot 4^x = 0$.

5.23. $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 9^x$.

5.24. $4^x = 2 \cdot 10^x + 3 \cdot 25^x$.

5.25. $64 \cdot 9^{-x} - 84 \cdot 12^{-x} + 27 \cdot 16^{-x} = 0$.

5.26. $4^{1/x} + 6^{1/x} - 9^{1/x} = 0$.

5.27. $8^x + 8 = 3\cdot 4^x + 3\cdot 2^{x+1}$.

5.28. $3^{-12x-1} - 9^{-6x-1} - 27^{-4x-1} + 81^{1-3x} = 2192$.

5.29. $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4$.

5.30. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$.

Решите неравенства

5.31. $2^{5+10x} > 1$.

5.32. $4^{2x} > 0{,}125$.

5.33. $2^{-x} > \dfrac{1}{128}$.

5.34. $\sqrt{27}\cdot 3^{x+1} < 9^{4x^2}$.

5.35. $3^{x-3} < 3\cdot 27^{-\frac{1}{x}}$.

5.36. $5^{-2x-x^2/3} < 5^{2+2x}\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x^2} + 24$.

5.37. $(0{,}2)^{(2x-1)/x} > 5$.

5.38. $(0{,}1)^{(1-2x)/(x+1)} > 10^3$.

5.39. $(0{,}25)^{4x^2+2x-2} < 4^{2x+3}$.

5.40. $(0{,}3)^{2x^2+3x+6} < 0{,}00243$.

5.41. $\sqrt{16^{(2x+2)/x}} < \sqrt[3]{8^{3x-7}}$.

5.42. $2^{-x+2} - 2^{-x+1} + 2^{-x-1} - 2^{-x-2} \le 9$.

5.43. $2^{x+1} + 2^{-x} - 3 < 0$.

5.44. $5^{1-2x} > 5^{-x} + 4$.

5.45. $25^x - 5^{x+1} \ge 50$.

5.46. $4^{-x-0{,}5} - 7\cdot 2^{-x-1} - 4 < 0$.

5.47. $4^{x+1} - 16^x < 2\cdot \log_9 27$.

5.48. $2^{x-0{,}5} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 1 + 2^{-x}$.

5.49. $4^{3x^2-x} - 8 < 2\cdot 8^{x^2-x/3}$.

5.50. $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x-1} \le 2$.

5.51. $\dfrac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < \dfrac{1}{2}$.

5.52. $\dfrac{2^{1+x} - 2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} \le 0$.

5.53. $8\cdot \dfrac{3^{x-2}-1}{3^x - 2^x} < 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

5.54. $\dfrac{33\cdot 3^{x-1} - 93}{12\cdot 9^x - 11\cdot 3^x - 15} \ge 5$.

5.55. $2^{2-x} - 2^{3-x} - 2^{4-x} > 5^{2-x} - 5^{-x}$.

5.56. $5^{x-2} + 5^{x-3} + 5^{x-4} > 7^{\frac{x}{2}+1} + 7^{\frac{x}{2}} + 7^{\frac{x}{2}-1}$.

5.57. $2^{2x} - 2\cdot 25^x - 10^x > 0$.

5.58. $2\cdot 4^x - 25\cdot 5^{2x} - 5\cdot 10^x > 0$.

5.59. $9\cdot 4^{1/x} + 5\cdot 6^{1/x} < 4\cdot 9^{1/x}$.

5.60. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 15^x\cdot 10^x$.

6. Логарифмические уравнения и неравенства

Решите уравнения

6.1. $2\log_8 2^{4x} = 2^{\log_{\sqrt{2}} 2}$.

6.2. $10^{\lg(\lg\sqrt{x})} - \lg x + \lg x^2 - 3 = 0$.

6.3. $\log_5\left(\dfrac{x+1}{10}\right) = \log_5\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

6.4. $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$.

6.5. $\dfrac{\log_2 5}{\log_2 10} + \lg(x+10) = 1 + \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$.

6.6. $2\log_4(4+x) = 4 - \log_2(x-2)$.

6.7. $\log_3((x+2)(x-2)) = 4\log_9(2x+3) - \log_{\sqrt5} 5$.

6.8. $2\log_8(2x) + \log_8(x^2+1-2x) = \dfrac{4}{3}$.

6.9. $\dfrac{1}{2}\lg\left(x+\dfrac{1}{8}\right) - \lg\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\lg\left(x-\dfrac{1}{2}\right) - \lg x$.

6.10. $\log_{1/2}(-x-1) + \log_{1/2}(1-x) - \log_{1/\sqrt2}(7+x) = 1$.

6.11. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x^2+1)} = 25$.

6.12. $\log_{x+1} 2 = 3$.

6.13. $\log_{1-x}(x^2+3x+1) = 1$.

6.14. $\log_{1-x}(x^2-x-6)^2 = 4$.

6.15. $(\lg x)^2 - 6\lg x = \lg x^2 - 5$.

6.16. $(\log_2 x)^2 - 2\log_2\sqrt{x} = 2$.

6.17. $\lg^{-1} x + 4\lg x^2 + 9 = 0$.

6.18. $\log_2\dfrac{x}{8} = \dfrac{15}{\log_2\dfrac{x}{16} - 1}$.

6.19. $\dfrac{\log_{27}\dfrac{27}{x^2}}{\log_{27}^2 x} = 3$.

6.20. $\log_2 x - 4\log_{x^2} 4 = 3$.

6.21. $\log_{\sqrt{x}} 2 + 8\log_{16} x^2 + 9 = 0$.

6.22. $3 + 2\log_{x-1} 3 = 2\log_3(x-1)$.

6.23. $1 + 2\log_{(x+5)} 5 = \log_5(x+5)$.

6.24. $\dfrac{1}{8}(\log_2(x-2)^4)^2 = \dfrac{\lg(2-x)}{\lg 2}\cdot 2^{2\log_2\sqrt3}$.

6.25. $\log_x 9x^2 \cdot \log_9^2 x = 1$.

6.26. $\log_2\sqrt{x+1} + 3\log_2\sqrt{1-x} = \log_2\sqrt{1-x^2}$.

6.27. $\dfrac{3}{2}\log_{1/4}(x-2)^2 - 3 = \log_{1/4}(x+4)^3 + \log_{1/4}(6-x)^3$.

6.28. $\log_4 x - \log_{1/2}(13-x) = \log_2(10-x)^2 - 2\log_{1/4}(8-x)$.

6.29. $\log_4\left(\log_2 x\right) + 3\log_{1/8}\left(\log_2\left(2\sqrt2 x\right)\right) = 1$.

6.30. $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3(x-1)))) = \dfrac{1}{2}$.

Решите неравенства

6.31. $\log_{11}(3x-1) > 1$.

6.32. $\log_{1/3}(7x-1) > 0$.

6.33. $\lg(x^2+5x+7) < 0$.

6.34. $\log_{0,5}(x^2+5x+6) > -1$.

6.35. $\log_8(x^2+4x+3) \le 1$.

6.36. $\log_{\sqrt2}\left(\dfrac{1-2x}{x}\right) \le 0$.

6.37. $2\log_{1/9}\left(\dfrac{2-3x}{x}\right) \ge -1$.

6.38. $\log_{1/5}(3x-4) > \log_{1/5}(x-2)$.

6.39. $\log_{0,1}(x^2 - x - 2) > \log_{0,1}(3 - x)$.

6.40. $1 + \log_2(2 - x) > \log_2(x^2 + 3x + 2)$.

6.41. $\log_{0,1}(4 - x) \geq \log_{0,1} 10 - \log_{0,1}(x - 1)$.

6.42. $\lg(x + 4) \geq -2\lg\dfrac{1}{2 - x}$.

6.43. $\log_{1/5}(x^2 + 6x + 18) + 2\log_5(-x - 4) < 0$.

6.44. $2\log_2 x - \log_2(2x - 2) > 1$.

6.45. $2\log_3(-x) - \log_{1/3}(4 + x) \leq \log_3(x + 1)^2 + 2\log_9(10 + x)$.

6.46. $\log^2{}_{0,5}\, x - \log_{0,5} x \leq 2$.

6.47. $\log_3 x \leq \dfrac{2}{\log_3 x - 1}$.

6.48. $\dfrac{1}{1 + \log_2 x} + \dfrac{1}{1 - \log_2 x} > 2$.

6.49. $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} \leq 1$.

6.50. $5 + 2\log_{1/3} x > 2\log_x 3$.

6.51. $\log_x\left(\dfrac{6 - 5x}{4x + 5}\right) > 1$.

6.52. $\log_{(x^{-2})}(x + 2) > -1$.

6.53. $\log_{\left(\frac{16}{25 - x^2}\right)}\left(\dfrac{14}{24 - 2x - x^2}\right) > 1$.

6.54. $\log_{(x/2)} 8 + \log_{(x/4)} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

6.55. $\log_5 x + \log_x \dfrac{x}{3} < \dfrac{2 - \log_3 x}{\log_3 x}\log_5 x$.

6.56. $\log_2 \sqrt{3x + 4} \cdot \log_x 2 > 1$.

6.57. $\log_5 \sqrt{3x + 1} \cdot \log_{x-1} 5 > 1$.

6.58. $\log_{1/2}(x + 1) \cdot \log_2 x > \log_{(x+1)} x$.

6.59. $\log_2 x - \log_2(x + 2) + \log_{(x+2)/x} 2 > 0$.

6.60. $1 + \log_{1/4}(\log_3(x + 4)) > 0$.

6.61. $\log_{\sqrt[4]{9}}(\log_{1/3}(x + 1)) \geq 2$.

6.62. $\log_{1/2} \log_2(x^2 - 2) > 0$.

6.63. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_8 \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}\right) < 0$.

6.64. $\log_{1/2} x^2 + \log_3 x^2 > 1$.

6.65. $\log_2\left(\log_3\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)\right) < \log_{1/8}\left(\log_{1/9}\left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right)\right)$.

7. Комбинированные уравнения и неравенства

Решите уравнения и неравенства

7.1. $(4\,|\,x + 1\,| + 1/2)^2 = 11(x + 1)^2 + 5/4$.

7.2. $\sqrt{|\,x - 1\,| - 1} \geq \sqrt{|\,x - 1\,| - 2011}$.

7.3. $\dfrac{x^3 - 8 + 6x(2 - x)}{|\,3 - 4x\,|} \leq \sqrt{4x - 3}$.

7.4. $\sqrt{x^2 - x + 4} \leq 2x + |\,3x + 2\,|$.

7.5. $5^{72}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x}}>1.$

7.6. $2^{|x-2|}-|\,2^{1-x}-1\,|=2^{1-x}+1\,.$

7.7. $2^{x}+2^{|x|}\geq 2\sqrt{2}.$

7.8. $\dfrac{3^{x}-2}{x^{2}-6x+5}\leq 0\,.$

7.9. $\dfrac{\log_{2}(1-x)}{x+1}<0\,.$

7.10. $\dfrac{1-\log_{0,5}x}{\sqrt{6x+2}}<0\,.$

7.11. $\dfrac{(x+0,5)(x+3)}{\log_{2}\,|\,x+1\,|}<0\,.$

7.12. $9^{\log_{3}(1+2x)}=5x^{2}-5\,.$

7.13. $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\log_{7}(x^{2}-1)}>1.$

7.14. $2^{\log_{5}(2/(x+2))}<1\,.$

7.15. $(0,3)^{\log_{5}(\log_{1/5}(x^{2}-\frac{4}{5}))}<1.$

7.16. $\log_{0,1}(101-5^{x})+2<0\,.$

7.17. $\log_{2}\dfrac{1}{|\,x+1\,|-1}=1\,.$

7.18. $\log_{2}\,\left|\,1-\dfrac{12}{x^{2}}\,\right|<1\,.$

7.19. $|\,\log_{3}(2-x)\,|>2\,.$

7.20. $2<|\,\log_{1/2}(x+1)-4\,|\leq 3\,.$

7.21. $\sqrt{\log_{\operatorname{tg}(3\pi/16)}(x-1)}\geq 1\,.$

7.22. $\sqrt{\log_{2}\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)}<1\,.$

7.23. $x^{2\lg x}=10x^{2}\,.$

7.24. $x\cdot x^{\lg x}=10\cdot x\,.$

7.25. $x^{\lg^{2}x-3\lg x+1}>1000.$

7.26. $x^{(\lg 10x)-2}<100\,.$

7.27. $\left(\dfrac{x+1}{10}\right)^{\lg(x+1)-2}<100.$

7.28. $\sqrt{x^{\log_{2}\sqrt{x}}}\geq 2.$

7.29. $3^{(\log_{3}x)^{2}/4}\leq\dfrac{x^{(\log_{3}x)/3}}{3}\,.$

7.30. $5^{\log_{x}49}-7^{\log_{x}5}-2\geq 0\,.$

7.31. $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{x^{-1}}=2.$

7.32. $\log_{1/3}x-3\cdot\sqrt{\log_{1/3}x}+2=0\,.$

7.33. $\log_{4/3}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})+\log_{4/25}(2/5)\geq 0.$

7.34. $\log_{5}(5^{x}-20)=x-1.$

7.35. $\log_{1/9}(2^{x+2}-4^{x})\geq -1\,.$

7.36. $\log_{3}(2^{-x}-3)+\log_{3}(2^{-x}-1)=1.$

7.37. $2(\lg 2-1)+\lg\left(5^{\sqrt{x}}+1\right)=\lg\left(5^{1-\sqrt{x}}+5\right).$

7.38. $2\log_{\sqrt{3}}3+\log_{\sqrt{3}}\left(3^{x^{2}-3}-1/9\right)<\log_{\sqrt{3}}26\,.$

7.39. $\lg 2^{x+3}-\lg(5^{x}-2)=x.$

7.40. $\dfrac{x+1}{3-\log_{3}(9-3^{-x})}\leq 1\,.$

7.41. $\log_{(x^{2}-2x-3)}\dfrac{|\,x\,|-|\,x-4\,|}{x+1}>0.$

7.42. $\log_{3}(\log_{1/8}((3/2)^{-x}-1/2))\leq -1\,.$

7.43. $\log_{-x}(\log_9((3^{-x}-9))<1$.

7.44. $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{1/2}(2^{x+1}-2)>-2$.

7.45. $\log_4\left(\sqrt{3}^x-1\right)\cdot\log_{1/4}\left(\dfrac{\sqrt{3}^x-1}{16}\right)\le\dfrac{3}{4}$.

7.46. $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}+x-1\right)\ge 1$.

7.47. $\log_{2x}4x\le\sqrt{\log_{2x}(16x^3)}$.

7.48. $\sqrt{(\log_{1/2}2x)^2+4\log_2\sqrt{2x}}<\sqrt{2}(4-\log_{16}16x^4)$.

7.49. $\left(x+\dfrac{8}{x}\right)\cdot|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)|\ge 9\cdot|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)|$.

7.50. $|4\cos^2x-1|+|4\cos^2x-3|=2$.

7.51. $\left|2\sin x+2\cos x+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}\right|\le 2$.

7.52. $81^{(\sin 2x-1)\cos 3x}-9^{(\sin x-\cos x)^2}=0$.

7.53. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}=\dfrac{10}{3}$.

7.54. $\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 3x-\cos x)=\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 2x)$.

7.55. $\sqrt{\sin x}+\cos x=0$.

7.56. $\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}=2\sqrt{\operatorname{tg}x}\cos x$.

7.57. $\sqrt{\cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x-3\cos^2x+\cos x+\dfrac{13}{4}}=\sqrt{3}\sin x+\dfrac{1}{2}$.

7.58. $\sqrt{5-2\sin x}\ge 6\sin x-1$.

7.59. $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1$.

7.60. $\sqrt{2-\sin x-\sqrt{3}\cos x}>1$.

7.61. $2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x}-\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)4^{\cos^2x}=-\left(2\sin^2x\right)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}\left(\sqrt{2}-1\right)}$.

7.62. $\log_{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin^2x-\dfrac{5}{12}}<-1$.

7.63. $\log_{(\sin x-\cos x)}(\sin x-5\cos x)\ge 1$.

7.64. $\sqrt{4\sin^2x-1}\cdot\log_{\sin x}\dfrac{x-5}{2x-1}\ge 0$.

7.65. $\sqrt{\arcsin x}+\sqrt{\arccos x}>\sqrt{\dfrac{7\pi}{12}}$.

* * *

7.66. Сколько различных корней имеет уравнение $\sqrt{6}x^2+2\sqrt{3}x+3=-2x$?

7.67. Сколько различных решений имеет неравенство $\sqrt{6}(x^2+2)+2\sqrt{5}x\le\sqrt[4]{35}(x^2-2)+2\sqrt{7}x$?

7.68. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos\left(\pi x^2\right)=\cos\left(\pi\left(x^2+2x+1\right)\right)$.

7.69. Найдите все корни уравнения $\sqrt{1-\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0$ на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};-\pi\right]$.

7.70. Найдите все корни уравнения $\cos x+\sqrt{\frac{1-\sin x}{2}}=0$ на промежутке $[3\pi;4\pi]$.

8. Системы

Решите системы

8.1. $\begin{cases}4x+7y=5,\\2x+3y=-6.\end{cases}$

8.2. $\begin{cases}2x+y=7,\\|x-y|=2.\end{cases}$

8.3. $\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1,\\y=5-|x-1|.\end{cases}$

8.4. $\begin{cases}y+|x+1|=1,\\|y-x|=5.\end{cases}$

8.5. $\begin{cases}\dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2},\\\dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}.\end{cases}$

8.6. $\begin{cases}3x+4\sin y=-11,\\-2x+5\sin y=\dfrac{7}{2}.\end{cases}$

8.7. $\begin{cases}\sqrt{12}\operatorname{ctg}x+\sqrt{2}y=4,\\-\sqrt{27}\operatorname{ctg}x+\sqrt{8}y=1.\end{cases}$

8.8. $\begin{cases}6\cos x+7\log_y 3=-10,\\-5\cos x+2\log_y 3=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

8.9. $\begin{cases}7\cdot 2^x+6y=2,\\3\cdot 2^{x+1}-5y=93.\end{cases}$

8.10. $\begin{cases}\dfrac{6}{2^{1-x}}+2\cdot 3^{y+1}=21,\\5\cdot 2^{x+2}-\dfrac{18}{3^{2-y}}=56.\end{cases}$

8.11. $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=\dfrac{1}{9},\\y-2x=4.\end{cases}$

8.12. $\begin{cases}2\log_x 8+3y=24,\\2\log^3{}_x 0{,}5+y=8.\end{cases}$

8.13. $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{4},\\\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1.\end{cases}$

8.14. $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{4},\\\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=5-2\sqrt{6}.\end{cases}$

8.15. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + x = -1, \\ \dfrac{x}{x+y} = -2. \end{cases}$

8.16. $\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$

8.17. $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$

8.18. $\begin{cases} \log_2(2x^2 - y^2) = 2, \\ 6\log_8(-x) + \log_2(y^2) = 4. \end{cases}$

8.19. $\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3 x^{-2}, \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$

8.20. $\begin{cases} \log_3 x - 2^y + y = 3, \\ y \cdot 2^y + 2^y \cdot \log_3 x = 4. \end{cases}$

8.21. $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$

8.22. $\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$

8.23. $\begin{cases} x + 2y = y^2 - x^2 + 3, \\ 2^{3x+y} = 512. \end{cases}$

8.24. $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$

8.25. $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$

8.26. $\begin{cases} y^2 = 4^x + 8, \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0. \end{cases}$

8.27. $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 + 8x^3\sqrt{y} + y = 1. \end{cases}$

8.28. $\begin{cases} 2^{y/x+3x/y} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-1}. \end{cases}$

8.29. $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$

8.30. $\begin{cases} 3^{\log_2(2x-y)} = 1, \\ 4^{x+y} - 2^{x+y} = 12. \end{cases}$

8.31. $\begin{cases} 3\log_5 x + \log_{\sqrt[3]{5}} y = 3, \\ \log_5(y - x - 2) + \log_{125}(y - x - 2)^3 = \log_5 12. \end{cases}$

8.32. $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

8.33. $\begin{cases} x^3\sqrt{x-y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$

8.34. $\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y + 2. \end{cases}$

8.35. $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$

8.36. $\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$

8.37. $\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos^2 y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$

8.38. $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$

8.39. $\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2}, \\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

8.40. $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \ge 0. \end{cases}$

8.41. $$\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$$

8.42. $$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2})\operatorname{tg} 5y = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2}) \sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}. \end{cases}$$

8.43. $$\begin{cases} 3 \sin x + \cos y = 0, \\ 6 \cos x - 2 \sin y = 7. \end{cases}$$

8.44. $$\begin{cases} y - x = 5, \\ xz = (z - 4)y + 30, \\ 2xz = (2z - 4)y. \end{cases}$$

8.45. $$\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$$

8.46. $$\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x + y - xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$$

8.47. $$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4{,}5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$$

8.48. $$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

8.49. $$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

8.50. $$\begin{cases} 2x^4 + y^2 = 10, \\ x^2 + 2y^4 = 10. \end{cases}$$

8.51. $$\begin{cases} \sqrt{x}(x + 3y) = 36, \\ \sqrt{y}(3x + y) = 28. \end{cases}$$

8.52. $$\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$$

8.53. $$\begin{cases} (1/4)^{-3x/2} + \log^3{}_3\, y = 504, \\ 4^x - 2^{x-1} \log_{\sqrt{3}} y + \log^2{}_3\, y = 84. \end{cases}$$

8.54. $$\begin{cases} \left(1 + 2\log_{|xy|} 2\right) \log_{x+y} |xy| = 1, \\ x - y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

8.55. $$\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x, \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$$

8.56. $$\begin{cases} \log_2 (10 - 3y) + \log_{1/2} (2y - 5x) = 0, \\ \sqrt{x + 2y + 1} - \sqrt{11 - 3y} = \sqrt{2x + 4y - 1} \end{cases}$$

8.57. $$\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

8.58. $$\begin{cases} \dfrac{xy}{x + y} = 1, \\ \dfrac{xz}{x + z} = 2, \\ \dfrac{yz}{y + z} = 3. \end{cases}$$

8.59. $$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

8.60. $$\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \\ z \ge 0. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

9. Планиметрические задачи

9.1. Найдите площадь правильного треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10 и 12.

9.2. Найдите периметр правильного треугольника, если центр описанной около него окружности удален от хорды, равной 2, на расстояние 3.

9.3. В треугольнике ABC основание D высоты $CD = \sqrt{3}$ лежит на стороне AB. Найдите AC, если $AB = 3$, $AD = BC$.

9.4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

9.5. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена медиана CM и высота CH, причём точка H лежит между A и M. Найдите отношение $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$.

9.6. Один из углов треугольника равен разности двух других, наименьшая сторона треугольника равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, вдвое больше площади описанного около треугольника круга. Найдите наибольшую сторону треугольника.

9.7. Окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с углом $\angle A = 30^\circ$, касается катета AC в точке K. Найдите BK.

9.8. Окружность радиуса 3, центр O которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника, касается катетов. Найдите площадь треугольника, если $OA = 5$.

9.9. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите $\angle B$, если $AE = 1$, $BD = 3$.

9.10. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла. Из точки D опущен перпендикуляр $DM = \sqrt{3}$ на сторону AC. Найдите BC, если $AD = 2\sqrt{3}$.

9.11. На стороне AB треугольника ABC с углами $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 130^\circ$ как на диаметре построен круг. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри треугольника.

9.12. Две равных хорды окружности образуют вписанный угол величиной 30°. Найдите отношение площади части круга, лежащей внутри угла, к площади всего круга.

9.13. Точка пересечения двух общих касательных к двум непересекающимся окружностям, меньшая из которых имеет радиус r, лежит на линии их центров на расстоянии $6r$ от центра большей окружности и делит отрезок касательной между точками касания в отношении $1 : 3$. Найдите площадь фигуры, состоящей из двух частей, ограниченных касательными и большими дугами окружностей.

9.14. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника с диагоналями 3 и 4, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, равны.

9.15. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите $AM : CM$, если площадь треугольника MCN вдвое больше площади трапеции $AMNB$.

9.16. Прямая, параллельная стороне $AB = 5$ треугольника ABC и проходящая через центр вписанной в него окружности, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$, если $MN = 3$.

9.17. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что $AM : MB = 3 : 2$ и $AN : NC = 4 : 5$. В каком отношении прямая, проходящая через точку M параллельно BC, делит отрезок BN?

9.18. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F, причём $EF = 8$. Найдите основания трапеции, если их отношение равно 4.

9.19. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом α и радиусом описанной окружности R.

9.20. Найдите отношение высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и B соответственно, если $\cos A = \frac{1}{5}$, $\sin B = \frac{1}{2}$.

9.21. Найдите углы треугольника со сторонами 10, 24 и 26.

9.22. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и B прямые, $AB = BC = 3$ и $BD = 5$. На сторонах AD и CD взяты такие точки E и F соответственно, что $AE = 1$ и $CF = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ABCEF$.

9.23. Одно из оснований равнобедренной трапеции равно 4. Найдите расстояние между точками касания с её боковыми сторонами вписанной в трапецию окружности радиуса 4.

9.24. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $AD = 5$ биссектриса угла A пересекает биссектрисы углов B и D в точках K и L соответственно, а биссектриса угла C пересекает те же биссектрисы в точках N и M соответственно. Найдите отношение площади четырёхугольника $KLMN$ к площади параллелограмма $ABCD$.

9.25. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит биссектрису прямого угла в отношении $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, считая от вершины.

9.26. Найдите высоту, биссектрису и медиану, проведённые из вершины одного угла треугольника, если они делят этот угол на четыре равные части, а радиус описанной около треугольника окружности равен R.

9.27. Найдите площадь треугольника со стороной a, противолежащим углом α и углом β.

9.28. Найдите биссектрису прямого угла треугольника с гипотенузой c и острым углом α.

9.29. В окружность радиусом R вписан равнобедренный треугольник с острым углом α при основании. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

9.30. В окружность диаметром 25 вписан равнобедренный треугольник с боковой стороной 20. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

9.31. Около треугольника ABC описана окружность с диаметром $AD = 2$. Найдите BC, если $AB = 1$ и $\angle BAD : \angle CAD = 4 : 3$.

9.32. Окружность радиуса 5 с центром O, лежащим на стороне AB треугольника ABC, касается сторон AC и BC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AO = 13$ и $BO = 7$.

9.33. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята такая точка D, что $CD = 2$ и биссектриса CL перпендикулярна прямой DL. Найдите AL.

9.34. Две окружности радиусов 2 и 8 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним, проведённая через точку A, пересекает другую общую касательную в точке B. Найдите AB.

9.35. Окружности радиусов 2 и 3 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним в точке A пересекает в точке B другую общую касательную, касающуюся в точке C меньшей окружности с центром O. Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $OABC$.

9.36. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Найдите KL, если $AM = 2, MC = 3$ и $\angle C = \frac{\pi}{3}$.

9.37. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон $AB = 4$ и $AC = 3$ в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если $BC = 2$.

9.38. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK, если $AC = a, \angle ABC = \alpha$, а периметр треугольника ABC равен $2p$.

9.39. Прямая, касающаяся окружности в точке K, параллельна хорде $AB = 6$. Найдите радиус окружности, если $AK = 5$.

9.40. Диагонали вписанной в окружность трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если её периметр равен 18, а основания относятся, как 1 : 7.

9.41. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = a$ и $AD = b$ вписана в окружность. Найдите радиус окружности, если $\angle CAD = \alpha$.

9.42. Окружность, проходящая через вершины C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите AE, если $AD = 4$ и $CE = 5$.

9.43. Через точку K диаметра AB окружности проведена хорда MN. Найдите AB, если $\angle ABM = 30°, \angle BMK = 15°$ и $MK = 3$.

9.44. Медианы BM и CN треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABM, если $BC = a$ и $AC = b$.

9.45. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой BC, если $BC = a$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$.

9.46. В треугольнике ABC проведена высота BH и медиана BM. Найдите угол $\angle MBH$, если $AB = 1$, $BC = 2$ и $AM = BM$.

9.47. Найдите углы треугольника ABC, если его медиана BM равна половине стороны AC, а один из углов, образованных биссектрисой BL и стороной AC, равен 55°.

9.48. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны m и n соответственно. Найдите стороны треугольника.

9.49. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $HK = 2\sqrt{2}$, а площади треугольников ABC и BHK равны 18 и 2 соответственно.

9.50. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK. Найдите площадь круга, описанного около треугольника KBH, если $AC = 1$ и $\angle KCH = \alpha$.

9.51. Отрезок, соединяющий основания высот, проведённых к сторонам AB и AC остроугольного треугольника ABC с углом $\angle A = \alpha$, равен l. Найдите BC.

9.52. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AL. Найдите AL, если $BL = b$ и $CL = c$.

9.53. В равнобедренной трапеции с боковой стороной 5, основание высоты, проведённой из вершины верхнего основания, делит нижнее основание на отрезки 12 и 3. Найдите верхнее основание трапеции, её площадь, высоту и диагональ.

9.54. Найдите площадь треугольника со сторонами a, b и c, его высоту, медиану и биссектрису, проведённые к стороне c, а также радиусы вписанной и описанной окружностей.

9.55. В треугольник со сторонами a, b и c вписана окружность. Найдите расстояние от противолежащей стороне c вершины треугольника до ближайшей точки касания.

9.56. Зная медианы треугольника, найдите его площадь.

9.57. Зная высоты треугольника, найдите его площадь.

9.58. Стороны треугольника равны a, b, c. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису, проведённую к стороне a?

9.59. Углы треугольника равны α, β, γ. В каком отношении точка пересечения высот делит высоту, проведённую из вершины угла α?

9.60. Даны две непараллельные стороны a и b параллелограмма. Найдите его диагональ d_1 по известной другой диагонали d_2.

9.61. Какова площадь треугольника со сторонами: а) 5, 9, 12; б) 2, 3, 6; в) $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$?

9.62. Найдите углы треугольника площадью 3, если две его стороны равны 3 и 4.

9.63. В треугольнике ABC со стороной $AB = 5$ и высотой $BD = 3$ найдите $\angle BAC$.

9.64. Две стороны треугольника равны 1 и 2, а синус угла между ними равен $\frac{1}{2}$. Найдите третью сторону и два других угла треугольника.

9.65. Существует ли треугольник с углами $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{7}, \arcsin\frac{\pi}{4}$?

10. Стереометрические задачи

10.1. В правильную шестиугольную пирамиду с высотой H вписан один конус, а около неё описан другой конус с радиусом основания R. Найдите разность объёмов этих конусов.

10.2. Конус вписан в правильную четырёхугольную пирамиду. Их общая высота равна 9/4, а радиус вписанной в конус сферы равен 1. Найдите разность объёмов пирамиды и конуса.

10.3. Через вершину S конуса проходит плоское сечение SAB площадью 42. Точки A и B делят длину окружности основания конуса в отношении 1:5 . Найдите объём конуса, если $\angle SAB = \arccos\frac{3}{\sqrt{58}}$.

10.4. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна d и образует с двумя смежными гранями углы α и β соответственно.

10.5. Найдите сторону основания правильной треугольной призмы объёмом V, если угол между диагоналями двух её боковых граней, проведёнными из одной вершины, равен α.

10.6. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды объёмом 36, если её высота вдвое больше радиуса окружности, описанной около основания.

10.7. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и углом φ между боковыми рёбрами.

10.8. Найдите двугранный угол при ребре основания правильной треугольной пирамиды, если угол между её боковыми рёбрами равен φ.

10.9. В правильной пирамиде $SABC$ с рёбрами $AB = 1$ и $AS = 2$ проведены биссектриса AL боковой грани SAB и медиана BM основания ABC. Найдите LM.

10.10. На высоте правильной треугольной пирамиды взята точка, удаленная от бокового ребра пирамиды на расстояние $4/\sqrt{13}$ и делящая высоту в отношении $1:2$, считая от вершины. Найдите объём пирамиды, если её боковые грани наклонены к основанию под углом $\pi/6$.

10.11. Найдите высоту пирамиды, основанием которой служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9, если её боковые рёбра наклонены к основанию под углом $60°$.

10.12. Найдите объём пирамиды, если её основанием служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 3 и углом $30°$, а боковые рёбра наклонены к основанию под углом $60°$.

10.13. Основанием пирамиды $SABC$ с высотой SH служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, а двугранные углы при рёбрах основания равны по $\arcsin\frac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AH = 1$ и $BH = 3\sqrt{2}$.

10.14. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды объёмом $9\sqrt{3}$ и высотой 3.

10.15. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если радиус описанной около неё сферы равен 2, а боковое ребро в $\sqrt{2}$ раз больше ребра основания.

10.16. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше её высоты. Найдите отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к апофеме пирамиды.

10.17. В правильной пирамиде $SABC$ с высотой SH и ребром основания $AB = a$ угол между боковым ребром и плоскостью основания равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно рёбрам SA и BC.

10.18. Плоскость, параллельная боковому ребру $AS = a\sqrt{2}$ и ребру $BC = a$ основания ABC правильной пирамиды $SABC$, проходит на расстоянии d от ребра AS. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

10.19. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды с высотой H и двугранным углом α при боковом ребре.

10.20. В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковое ребро равно a, а двугранный угол при этом ребре равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, D и середину ребра SC.

10.21. Все рёбра правильной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны по 2. Плоскость, параллельная прямым AC и SB, пересекает рёбра AB и BC в точках M и N. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если $MN = \sqrt{2}$.

10.22. В правильной пирамиде $SABCD$ с высотой 4 сторона основания $SABC$ равна 6. Точки M и N — середины ребер BC и CD. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SMNC$.

10.23. На воздушном шаре, двигавшемся относительно Земли вдоль заданной параллели на постоянной высоте, было совершено кругосветное путешествие. На какой широте совершалось путешествие, если разность расстояний, пройденных верхней и нижней точками шара, оказалась равной удвоенному диаметру шара?

10.24. Какими должны быть радиусы четырёх одинаковых шаров, чтобы их можно было разместить внутри данной сферы радиуса R и при этом каждый шар касался сферы и трёх других шаров?

10.25. Два шара радиуса r касаются друг друга и боковой поверхности конуса, а так же его основания — в точках, симметричных относительно центра. Найдите объём конуса, если его высота в $4/3$ раза больше радиуса основания.

10.26. Площадь сечения правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через вершину её основания перпендикулярно противоположному ребру, вдвое меньше площади основания пирамиды. Найдите отношение высоты пирамиды к боковому ребру.

10.27. Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы с центром O и радиусом 4. Найдите $\angle ABC$, если площадь треугольника AOC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

10.28. Вне правильного тетраэдра $ABCD$ взята такая точка M, что $MA = MB = MC = \sqrt{97}$ и $MD = \sqrt{2}$. Найдите объём тетраэдра.

10.29. Стороны $AB = 6$ и CD основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$ параллельны, $AD = 4$, $AS = 2\sqrt{14}$ и $\angle BAD = 120°$. Найдите объём пирамиды, если через каждую из прямых AB и CD можно провести по плоскости, которые не содержат основание пирамиды и пересекают её по равным четырёхугольникам.

10.30. Основанием прямой призмы служит ромб $ABCD$ с $\angle A = 120°$. На боковых рёбрах AA', BB' и CC' взяты такие точки K, L и M соответственно, что угол между прямыми KL и AB равен $45°$, а между прямыми LM и BC — $30°$. Найдите угол между плоскостями KLM и ABC.

10.31. Площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через её боковое ребро, равное $\sqrt{13}$, и высоту, вдвое больше площади её основания. Найдите площадь её боковой грани.

10.32. На ребре AS правильной пирамиды $SABC$ объёмом V взята такая точка D, что $SD : DA = m : n$. Расстояние от центра основания ABC до плоскости BCD равно d. Найдите площадь треугольника BCD.

10.33. На боковых рёбрах AA' и BB' треугольной призмы $ABCA'B'C'$ объёмом V взяты такие точки D и E соответственно, что $AD = DA'$ и $BE : BE' = 1 : 2$. Найдите объём призмы, заключённой между плоскостями ABC и DEC.

10.34. Найдите площадь поверхности параллелепипеда объёмом 8, вписанного в сферу радиуса $\sqrt{3}$.

10.35. На каком расстоянии от ребра SA правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S должна проходить плоскость, параллельная рёбрам $BC = a$ и $AS = b$, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была максимальной?

10.36. Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной 15, а радиус вписанного в пирамиду шара равен 3. Найдите высоту пирамиды, если она совпадает с ребром SA.

10.37. Хорды AA', $BB' = 18$ и CC' сферы радиуса 11 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, находящейся на расстоянии $\sqrt{59}$ от центра сферы. Найдите AA', если $CM : MC' = (8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2})$.

10.38. На рёбрах AB, BC и CD правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1 взяты такие точки K, L и M соответственно, что $AK = 1/2$ и $BL = CM = 1/3$. Плоскость KLM пересекает прямую AD в точке N. Найдите угол между прямыми NK и NL.

10.39. Точка M равноудалена от вершин A и D правильного тетраэдра $ABCD$, а от каждой из вершин B и C находится на расстоянии $\sqrt{3/2}$. Прямая MC перпендикулярна высоте DH треугольника ACD. Найдите объём тетраэдра.

10.40. В правильную пирамиду $SABCD$ вписана сфера радиуса 2. Этой сферы, граней BSC, CSD и основания $ABCD$ пирамиды касается, другая сфера радиуса 1. Найдите объём пирамиды и двугранный угол при боковом ребре.

10.41. Найдите ребро основания правильной призмы $ABCA'B'C'$ с боковым ребром $AA' = 2$, если угол между скрещивающимися прямыми AC' и $A'B$ равен $\alpha < 60°$.

10.42. На ребре BD тетраэдра $ABCD$ взята такая точка E, что $DE : BE = 3 : 5$. Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки A и D параллельно медиане BM треугольника ABC, делит объём тетраэдра.

10.43. На рёбрах AD и BD тетраэдра $ABCD$ взяты такие точки E и F соответственно, что $DE : AE = SF : BF = 1 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки E и F параллельно ребру CB, делит объём тетраэдра.

10.44. Двугранный угол при ребре AB тетраэдра $ABCD$ равен $\pi/4$. Найдите $\angle DAC$, если $\angle DAB = \pi/2$ и $\angle BAC = 3\pi/4$.

10.45. Двугранный угол при ребре AC тетраэдра $ABCD$ равен $\pi/4$. Найдите BD, если $AB = 2$, $AD = \sqrt{2}$, $\angle BAC = \pi/6$ и $\angle CAD = \pi/2$.

10.46. Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, если $AB = BC = 2, AC = 1$, а ребро $CD = 4$ перпендикулярно рёбрам AB и AC.

10.47. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, две вершины которого лежат на диагонали куба с ребром 2, а две другие вершины – на диагонали грани этого куба.

10.48. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а точка E не лежит в его плоскости. Найдите угол между двумя прямыми, по которым пересекаются две пары плоскостей ABE, CDE и BCE, ADE.

10.49. Дан тетраэдр $ABCD$ с углом $\angle ABC = \beta \leq 90°$. Найдите угол между двумя прямыми, проходящими через две пары точек: середины ребер AC, BC и середины ребер BD, CD.

10.50. Точка A находится на расстоянии a от данной плоскости и на расстоянии b от прямой L, лежащей в этой плоскости. Найдите расстояние от проекции точки A на плоскость до прямой L.

10.51. Найдите угол между боковым ребром a правильной треугольной пирамиды и плоскостью её основания со стороной b.

10.52. В одной из граней двугранного угла величины α взята точка A на расстоянии d от ребра двугранного угла. Найдите расстояние от точки A до плоскости второй грани.

10.53. Пусть A' — проекция точки A на данную плоскость, $AA' = a$. Через точку A проходит другая плоскость, образующая с данной плоскостью угол α и пересекающая её по прямой L. Найдите расстояние от точки A' до прямой L.

10.54. В пирамиде $SABC$ с $\angle ABC = \alpha$ точка B — проекция точки S на плоскость ABC. Найдите величину угла между гранями SAB и SBC.

10.55. На ребре $BC = 4$ куба $ABCDA'B'C'D'$ взята середина M, а на ребре $A'D'$ — такая точка N, что $A'N = 1$. Найдите длину кратчайшего пути из точки M в точку N по поверхности куба.

10.56. Найдите объём куба $ABCDA'B'C'D'$, если сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через точки A, B, C и середину ребра $A'D'$.

10.57. Расстояния от концов отрезка до некоторой плоскости равны 1 и 3. Чему может быть равно расстояние от середины этого отрезка до той же плоскости?

10.58. Боковые грани пирамиды $SABC$ одинаково наклонены к основанию ABC, $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$ и $\angle ACB = 90°$. В пирамиду вписан цилиндр площадью боковой поверхности $8\pi/3$; нижнее его основание лежит в плоскости ABC, а верхнее имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью. Каким может быть радиус основания этого цилиндра?

10.59. Чему может быть равна сумма углов, образуемых произвольной прямой с данной плоскостью и с перпендикуляром к ней?

10.60. Какие значения может принимать величина угла, получаемого в сечении произвольной плоскостью фиксированного двугранного угла величины α?

11. Задачи на доказательство

11.1. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
а) треугольник — правильный;
б) все медианы треугольника равны;
в) все высоты треугольника равны;
г) все биссектрисы треугольника равны.

11.2. Докажите, что из медиан любого треугольника можно сложить треугольник. Верно ли аналогичное утверждение для высот треугольника?

11.3. Докажите, что угол между секущими, выходящими из точки вне круга, измеряется полуразностью двух дуг окружности, расположенных внутри угла.

11.4. Докажите, что вертикальные углы между пересекающимися хордами измеряются полусуммой двух дуг окружности, на которые они опираются.

11.5. Докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, заключённой между ними.

11.6. Хорды AB и CD окружности с центром в точке O радиуса R пересекаются в точке E. Докажите, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE = R^2 - OE^2$.

11.7. Через точку A, лежащую вне окружности с центром в точке O радиуса R, проведена секущая и касательная. Секущая пересекает окружность в точках B и C, а касательная касается окружности в точке D. Докажите, что $AD^2 = AB \cdot AC = AO^2 - R^2$.

11.8. Пусть AD — биссектриса внутреннего или внешнего (в этом случае точка D лежит на продолжении BC) угла треугольника ABC. Докажите, что $BD : CD = AB : AC$.

11.9. Докажите, что в выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

11.10. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

11.11. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то плоскость, проходящая через середины отрезков AD, BD, CD, параллельна:

а) прямой AB;

б) плоскости ABC.

11.12. Докажите, что в пространстве для любых четырёх различных точек A, B, C, D середины K, L, M, N отрезков AB, BC, CD, DA соответственно служат вершинами параллелограмма $KLMN$.

11.13. Докажите, что если три прямые в пространстве не проходят через одну точку и попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости.

11.14. Три прямые проходят через точку A. Точки B, B' — точки одной прямой, C, C' — точки другой прямой, D, D' — точки третьей прямой. Докажите, что отношение объёмов пирамид $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равно $(AB \cdot AC \cdot AD) : (AB' \cdot AC' \cdot AD')$.

11.15. Докажите, что отношение площади многоугольника, расположенного в одной плоскости, к площади его проекции на другую плоскость равно $1 : \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями.

11.16. Докажите, что если S и P — площади двух граней тетраэдра, a — их общее ребро, а α — двугранный угол между ними, то объём этого тетраэдра равен $\dfrac{2SP\sin\alpha}{3a}$.

11.17. Докажите, что если a и b — противоположные рёбра тетраэдра, d — расстояние между ними, а α — угол между ними, то объём этого тетраэдра равен $\dfrac{abd\sin\alpha}{6}$.

11.18. Докажите, что плоскость, делящая пополам двугранный угол при ребре тетраэдра, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

* * *

11.19. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных точек этой плоскости.

11.20. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных прямых этой плоскости.

11.21. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от трёх попарно пересекающихся прямых этой плоскости.

11.22. Даны две разные точки A и B плоскости и число $\alpha \in [0; \pi]$. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ плоскости, для которых $\angle AMB = \alpha$.

11.23. Пусть A — фиксированная точка, не лежащая в данной плоскости, а M — произвольная точка этой плоскости. Найдите геометрическое место середин отрезков AM.

11.24. Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат в двух параллельных плоскостях.

11.25. Даны две разные точки A и B пространства. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ пространства, для которых $\angle AMB = 90°$.

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

12. Подготовительные упражнения

Для каждого значения a решите уравнение или неравенство (относительно x).

12.1. $a \cdot x = 1$.

12.2. $a \cdot x < 1$.

12.3. $(a^2 - 1)x = a - 1$.

12.4. $\dfrac{x - a}{x - 1} = 0$.

12.5. $\dfrac{x^2 - 1}{x - a} = 0$.

12.6. $\dfrac{x - 1}{x^2 - a^2} = 0$.

12.7. $\dfrac{a(x - 1)}{x - a} = 0$.

12.8. $x^2 = a$.

12.9. $x^2 > a$.

12.10. $x^2 < a$.

12.11. $|x| = a$.

12.12. $|a| = x$.

12.13. $|x| < a$.

12.14. $|x| > a$.

12.15. $\sqrt{x} = a$.

12.16. $a\sqrt{x} = 0$.

12.17. $\sqrt{x} > a$.

12.18. $\sqrt{x} < a$.

12.19. $2^x < a$.

12.20. $2^x > a$.

12.21. $\left(\sqrt{a}\right)^x = 1$.

12.22. $\log_a x < 1$.

12.23. $\log_x a \le 0$.

12.24. $\cos x = a$.

12.25. $\sin x = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$.

* * *

12.26. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то число $p^2 - 1$ делится нацело на 24.

12.27. Докажите, что если p и q — простые числа, большие 3, то число $p^2 - q^2$ делится нацело на 24.

12.28. Докажите, что число $2^{10} + 5^{12}$ — составное.

12.29. Докажите, что число $222^{333} + 333^{222}$ — составное.

12.30. Докажите, что число $2010^{2010} - 1$ делится на 2009.

12.31. Докажите, что если сумма цифр десятичной записи числа n равна сумме цифр десятичной записи числа $2n$, то число n делится на 9. Верно ли обратное утверждение?

12.32. Найдите все числа вида $\overline{34x5y}$, кратные 36.

12.33. Докажите, что для любого натурального n число n^2+n чётное.

12.34. Докажите, что для любого целого n число n^3+2n делится на 3.

12.35. Докажите, что для любого целого n число n^3+5n делится на 6.

12.36. Докажите, что для любого целого n число n^5-n делится на 30.

12.37. Докажите, что в последовательности 11, 111, 1111, 11111,... нет числа, являющегося квадратом натурального.

12.38. Докажите, что все числа вида 16, 1156, 111556, 11115556,... являются полными квадратами.

12.39. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 54 и 72.

12.40. Докажите, что при любом натуральном значении n числа $3n+5$ и $5n+8$ взаимно просты.

12.41. Докажите, что для любого натурального n наибольший общий делитель чисел $n^2+10n+21$ и $n^2+9n+18$ равен $n+3$.

12.42. Докажите, что для любого натурального n наименьшее общее кратное чисел n^2+6n+9 и $n+4$ равно $n^3+10n^2+33n+36$.

12.43. Докажите, что ни при каком целом n число $n^2+5n+16$ не делится на 169.

12.44. Запишите число 0,11(7) в виде обыкновенной дроби.

12.45. Докажите, что числа $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ — иррациональные.

12.46. Докажите, что числа $\log_2 3$ и $\log_4 6$ — иррациональные.

12.47. Решите уравнение $3x-4y=1$ в целых числах.

12.48. Докажите, что уравнение $x^2+1=3y$ не имеет решений в целых числах.

12.49. Решите уравнение $xy+x+y=0$ в целых числах.

12.50. Докажите, что если хотя бы одно из рациональных чисел p и q отлично от -2, то ни один из корней уравнения $x^2+px+q=0$ не равен $1+\sqrt{3}$.

13. Задачи экономической тематики

13.1. 31 декабря 2014 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Владимир переводит в банк 4 548 600 рублей. Какую сумму взял Владимир в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

13.2. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 6 944 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Сергей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

13.3. 31 декабря 2014 года Геннадий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Геннадий переводит очередной транш. Геннадий выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 600 тыс. рублей, во второй 55 тыс. рублей. Найдите a.

13.4. Фёдор хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Фёдор взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?

13.5. 1 января 2015 года Михаил Юрьевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Михаил Юрьевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Михаил Юрьевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 250 тыс. рублей?

13.6. 31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Максим переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 1 640 250 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 936 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Максим взял деньги в банке?

13.7. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1027,5 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

13.8. 15-го января планируется взять кредит в банке на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на 16-й месяц кредитования нужно выплатить 29,6 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

13.9. 15-го января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

13.10. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 500 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 3000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

13.11. В двух областях есть по 40 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

13.12. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

13.13. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 80 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Во второй шахте имеется 180 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

13.14. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 653 квадратных метра. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» – 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

13.15. В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 9000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 2000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

14. Задачи с параметрами

14.1. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 2a \end{cases}$ имеет решения.

14.2. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1, \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ имеет решения.

14.3. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

14.4. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$ не имеет решений.

14.5. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.6. Для каждого значения a решите систему $\begin{cases} (a-4)x + 2y = 4, \\ (a-4)^3 x + 4ay = 16. \end{cases}$

14.7. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $x > y$.

14.8. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 3x - y = a, \\ 6x - ay = 4, \\ x > 0 > y \end{cases}$ имеет решение.

14.9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет ровно два различных корня.

14.10. Найдите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $x^2 - 2(a+2)x + 12 + a^2 = 0$ имеет ровно два различных корня.

14.11. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

14.12. Найдите все целые значения a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

14.13. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 2(a+1)x + (a+3) = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

14.14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет два корня, сумма которых равна нулю.

14.15. Найдите все значения a, при каждом из которых один корень уравнения $x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2 = 0$ вдвое больше другого.

14.16. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов чисел, составляющих решение системы $\begin{cases} 3x - y = 2 - a, \\ x + 2y = a + 1, \end{cases}$ будет наименьшей.

14.17. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$ принимает наименьшее значение.

14.18. Для каждого значения a решите уравнение $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0$.

14.19. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет корней.

14.20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\log_{a-6,5}(x^2+1)=\log_{a-6,5}((a-5)x)$ имеет ровно два различных корня.

14.21. Для каждого значения a решите уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a}=2$.

14.22. Для каждого значения a решите неравенство $3(2x-a)+5a\sqrt{2x-a}-2a^2>0$.

14.23. Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции $f(x)=\dfrac{x^2+2ax-4}{x^2-2x+3}$ содержится в интервале $(-3;2)$.

14.24. Известно, что $x=1$, $y=-1$ — одно из решений системы $\begin{cases}3ax+by=\sqrt{3}\mathrm{tg}\dfrac{1111\pi}{6},\\ ax^2+by^2=2.\end{cases}$ Найдите остальные решения системы.

14.25. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a+2-2^{x-2}}{a+3}\geq\dfrac{5a+5}{2(2^x+3a+3)}$ содержит какой-нибудь луч на числовой прямой.

14.26. Для каждого значения a решите уравнение $|x+3|-a|x-1|=4$.

14.27. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2|x-2|+a+x=4$ имеет хотя бы один корень, причём все его корни лежат на отрезке $[0;4]$.

14.28. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2-(a+1)x+3(a-2))\log_{a-x}(2a-x-1)=0$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1;2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

14.29. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases}x-a^2\log_3 y=1,\\ x+3a\log_3 y=1\end{cases}$ имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $y>1-x$.

14.30. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого b найдётся c такое, что система $\begin{cases}2x+by=ac^2+c,\\ bx+2y=c-1\end{cases}$ имеет решения.

14.31. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого b система $\begin{cases}x-by+az^2=0,\\ 2bx+(b-6)y-8z=8\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

14.32. Найдите все тройки (a,b,c), при которых уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет единственный корень $x=-1$, причём $a+b+c=1$.

14.33. Известно, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней, и $a+b+c<0$. Найдите знак c.

14.34. Числа $a < 0$ и b таковы, что $x = 7$ является корнем уравнения $ax^2 + bx + 2 = 0$. Решите неравенство $ax^4 + bx^2 + 2 > 0$.

14.35. Найдите все значения a, при каждом из которых графики функций $y = \dfrac{3x+1}{x}$ и $y = \dfrac{4x + 3a - 7}{ax - 1}$ разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

14.36. Для каждого значения a решите уравнение $\log_a(x^2 - 3a) = \log_a(ax^2 - 3x)$.

14.37. Найдите все значения a, при каждом из которых все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$ удовлетворяют неравенству $|x| < 1$.

14.38. Для данных чисел $a = \log_y x$ и $b = \log_z x$ найдите $\log_{\sqrt[3]{xyz}}\left(\dfrac{yz}{x^3}\right)^2$.

14.39. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5}\right) > 0$ выполняется для всех x.

14.40. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} a(x-4) = 3(y+2), \\ y + \sqrt{x} = 0 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

14.41. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x, \\ x^2 + y^2 \le a \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.42. Для каждого значения a определите, сколько решений имеет система $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

14.43. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} y - x^2 = \left|x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1\right|, \\ y + 4x = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.44. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 - x + 2)$ имеет ровно три различных корня.

14.45. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = a(2\sin x + \cos^2 x + 1)$ не принимает значений, больших 3.

14.46. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = \log_{25-a^2}(\cos x + \sqrt{8}\sin x - a)$ определена при всех x.

14.47. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $| 3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a | \le 3$ выполняется при всех x.

14.48. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $5\cos x + \sin x + \cos(x - b) = a$ имеет решение:

а) хотя бы при одном b;

б) при любом b.

14.49. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) = a + \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$ имеет хотя бы один корень.

14.50. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + 2ax + 4a^2 - 5a + 3 \le 4\sin y - 3\cos y, \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.51. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x + y + z = x^2 + 4y^2, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.52. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} | x^2 - 5x + 4 | -9x^2 - 5x + 4 + 10x | x | = 0, \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.53. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 4x = a + 3 - y^2 + 2y, \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

14.54. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

14.55. Найдите все натуральные n, при каждом из которых арифметическая прогрессия не восстанавливается однозначно по её семнадцатому члену и сумме первых n членов.

15. Задачи с целыми числами

15.1. Первый член геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем, равным 5, а разность между утроенным вторым членом и половиной третьего – больше 20. Найдите знаменатель прогрессии.

15.2. После деления двузначного числа на сумму его десятичных цифр в частном получилось 7, а в остатке 6. После деления того же числа на произведение его цифр в частном получилось 3, а в остатке 11. Найдите это число.

15.3. Ученик перемножил два данных натуральных числа и допустил ошибку, увеличив произведение на 372. Поделив для проверки полученный результат на меньшее из данных чисел, ученик правильно получил в частном 90 и в остатке 29. Найдите данные числа.

15.4. Мастер делает в час целое число деталей, большее 5, а каждый из его учеников – на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе на 1 ч быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?

15.5. На факультет подано от немедалистов на 600 заявлений больше, чем от медалистов. Девушек среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в 5 раз, а юношей среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в n раз, где n — натуральное число, и $6 \le n \le 13$. Найдите общее число заявлений, если среди медалистов юношей на 20 больше, чем девушек.

15.6. Имеется два проекта застройки микрорайона. По первому проекту предполагается построить несколько одинаковых домов, содержащих в общей сложности 12 096 квартир. По второму проекту предполагается построить на 8 домов больше, причём домов также одинаковых, но с большим числом квартир в каждом, и содержащих в общей сложности 23 625 квартир. Сколько домов предполагается построить по первому проекту?

15.7. Авиалинию, связывающую два города, обслуживают самолёты только трёх типов. Каждый самолёт первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолёты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите число действующих на линии самолётов каждого типа, если их общее число не превосходит 8.

15.8. На клетчатой бумаге выделен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно простые и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

15.9. А, И, Б сидели на трубе в указанном порядке. К ним стали подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. С некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

1) Какая буква в циклически повторяющемся наборе встречалась наиболее часто?

2) Может ли циклически повторяющийся набор при каких-либо других начальных буквах состоять из одной буквы? Если да, то из какой?

15.10. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < 15/2. \end{cases}$

15.11. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} 7875x^2 = 567y^3, \\ |x| \le 25. \end{cases}$

15.12. Найдите все целочисленные решения уравнения $3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$.

15.13. Найдите все целочисленные решения уравнения $3x = 5y^2 + 4y - 1$ и докажите, что для любого такого решения (x, y) число $x^3 + y^3$ — нечётное.

15.14. Найдите наименьшее нечётное натуральное число, кратное 9 и дающее остаток 7 при делении на 13.

15.15. Первая бригада изготовила деталей на 15% больше, чем вторая. Все детали уложили в два ящика: в первый ящик – менее 1000 деталей, а во второй – более 1000. Сколько деталей положили в первый ящик, если в нем оказалось 2/3 деталей, изготовленных первой бригадой, и 1/7, изготовленных второй?

15.16. Найдите число студентов, сдавших экзамен, если шестая их часть получила оценку «удовлетворительно», 56% — «хорошо», а 14 человек — «отлично», причём отличники составили более 4%, но менее 9% от общего числа экзаменовавшихся студентов.

15.17. Экзаменующиеся сдавали экзамены в два потока в нескольких аудиториях. В каждом потоке число экзаменующихся в каждой аудитории, было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их пришлось бы провести в три потока, причём в каждом потоке в каждой аудитории экзаменующихся удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий. Какое наименьшее число экзаменующихся могло быть проэкзаменовано при этих условиях?

15.18. В двух коробках лежали карандаши: в первой – красные, во второй – синие, причём красных было меньше, чем синих. Сначала 40% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причём половину из переложенных карандашей составляли синие. В итоге красных карандашей в первой коробке оказалось на 46 больше, чем во второй. Найдите общее количество синих карандашей.

15.19. Найдите все пары целых чисел a и b, для каждой из которых уравнение $\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} - a\cdot 2^{\sin\pi ax} - \left|\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + a\cdot 2^{\sin\pi ax}\right| = 2ab$ имеет не менее 10 различных корней.

15.20. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $a^3\,|\,y\,| \le \sqrt{2}(a^2-x^2)$ имеет наименьшее количество целочисленных решений.

15.21. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2-3x+3\,|\,x+a\,|+a \le 0$ имеет наибольшее количество целочисленных решений.

15.22. Найдите все целочисленные решения неравенства $\sqrt{x^3-5x-3} \le 6-x$.

15.23. Найдите все целочисленные решения уравнения $(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy$.

15.24. Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие системе
$$\begin{cases} 2x+47 < 22y-2y^2, \\ 7x+14 \le 4y. \end{cases}$$

15.25. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} x^2+y^2 < 16x-22y-171, \\ 30x-y^2 > 252+x^2+14y. \end{cases}$

15.26. Найдите все целые a, при каждом из которых графики функций $y = \log_{1/\sqrt{2}}(x - 2a)$ и $y = \log_2(x - 2a^3 - 3a^2)$ пересекаются в точке с целочисленными координатами.

15.27. Найдите все a, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^a - \frac{5}{8}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} - 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} + 2\right) = 0$$

имеет хотя бы один корень, и все его корни – целочисленные.

15.28. Первые 80 км пути из одного пункта в другой автобус идёт по шоссе, а оставшиеся 120 км – по грунтовой дороге, на два часа дольше. Совершив более четырёх рейсов по маршруту туда и обратно, он затратил менее 168 ч, включая стоянки в конечных пунктах. Найдите скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге, если за время, которое автобус провел в движении, он со скоростью, равной среднему арифметическому этих двух скоростей, проехал бы 2100 км.

15.29. Когда груз разложили в вагоны по 80 т, один вагон оказался недогружен. Если бы груз разложили в вагоны по 60 т, то понадобилось на 8 вагонов больше, причём один вагон опять оказался недогруженным. Если груз разложили в вагоны по 50 т, то понадобилось еще на 5 вагонов больше, причём все вагоны оказались полными. Найдите вес груза.

15.30. В саду было подготовлено чётное число ям для посадки деревьев. После посадки яблонь, груш и слив оказалось, что использовано менее трети ям, груш посажено на 6 больше, чем яблонь, а свободных ям оказалось втрое больше, чем посажено слив. Если бы яблонь посадили втрое больше, то свободных осталось бы 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено?

15.31. Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат её первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?

15.32. В двух ящиках содержится в общей сложности более 29 деталей. Число деталей, содержащихся в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем втрое превышает число деталей, содержащихся во втором ящике. Утроенное число деталей, содержащихся в первом ящике, превышает удвоенное число деталей, содержащихся во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей содержится в каждом ящике?

15.33. Три мальчика хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, они не смогли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 коп. Когда третьему мальчику добавили вдвое больше денег, чем у него было, после покупки двух игрушек у них еще осталось 6 коп. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 коп. больше, чем у первого?

15.34. Число двухкомнатных квартир в доме вчетверо больше числа однокомнатных, а число трёхкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трёхкомнатных квартир увеличить впятеро, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если их не меньше 100?

15.35. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0.$$

15.36. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 - 125x^2 + 82y^2 + 51 = 0.$$

15.37. Найдите все целочисленные корни уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1$.

15.38. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} 4^{x^2+2xy+1} = 7^{|y|-1}(z+2), \\ \sin\dfrac{3\pi z}{2} = 1. \end{cases}$

15.39. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ axy + ayz + azx > xyz \end{cases}$ имеет ровно пять различных решений в натуральных числах.

15.40. Решите уравнение $\cos\left(\pi\left(x + 7\sqrt{x}\right)\right)\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}(4x + \sqrt{x}\right)\right) = 1$.

15.41. Найдите все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{3x^2 - 2z^2 + 2y^2 + 2z - 6y + \frac{\sqrt{2}}{4}x - 41} + \sqrt{2x^2 - 4\sqrt{2}(\cos\pi y + \cos\pi z)} = 0.$$

15.42. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2 + 1953^{100}xy - 1995^{100}y^2 = 0$.

15.43. В ящике находится 13 черных шаров и 17 белых. Разрешается:

а) увеличить на 1 число черных шаров и одновременно увеличить на 4 число белых;
б) увеличить на 2 число черных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;
в) уменьшить на 4 число черных шаров и одновременно увеличить на 5 число белых;
г) уменьшить на 5 число черных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая в каком-либо порядке и количестве описанные действия, добиться, чтобы в ящике оказалось 37 черных шаров и 43 белых?

15.44. Две бригады землекопов одинаковой производительности каждый вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она закончила бы работу на 2 ч раньше. Найдите число землекопов в каждой бригаде.

15.45. Рота солдат прибыла на парад прямоугольным строем по 24 человека в ряд, однако не все прибывшие солдаты смогли участвовать в параде. Оставшийся для парада состав перестроили так, что число рядов уменьшилось на 2, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы построить в виде квадрата. Сколько солдат было в роте?

15.46. Три фермера привели баранов для продажи на ярмарке: первый — 10, второй — 16, третий — 26. В первый день они установили одинаковую цену (в целое число рублей), и каждый продал не менее одного барана, но не всех. Во второй день они продали остальных баранов, опять же по одинаковой, но более низкой цене. По какой цене продавались бараны в первый и во второй день, если каждый фермер выручил от продажи по 3500 руб.?

15.47. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала по 5%, затем по $11\frac{1}{9}\%$, по $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, по 12%. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

15.48. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m и n — натуральные числа. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

15.49. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключён в пределах от 2,9% до $3{,}1\%$. Каково наименьшее число учеников в классе?

15.50. Из строительных деталей двух видов можно собирать дома трёх типов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого вида и 100 второго, для сборки 16-квартирного дома — 110 деталей первого типа и 150 второго, а для сборки 21-квартирного дома — 150 деталей первого типа и 200 второго. Всего имеется 900 деталей первого вида и 1300 второго. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

15.51. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъёмность 19 т. Масса маленького блока 0,2 т, большого — 3,6 т, большой блок занимает место 14 маленьких. Найдите наименьшее число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

15.52. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства $4\cdot 3^{2x+1}+3^{x}<1$.

15.53. В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 1,5 у.е., роза — 2 у.е. На покупку гвоздик и роз можно затратить не более 30,5 у.е. При этом число гвоздик не должно отличаться от числа роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов, при этом гвоздик нужно купить как можно меньше. Сколько гвоздик и сколько роз можно купить при указанных условиях?

15.54. Множество состоит из более семи различных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 210, а произведение — делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа, причём наибольший общий делитель любых двух из них больше единицы. Найдите все числа, составляющие это множество.

15.55. Сколько точек с целочисленными координатами находится строго внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = \frac{3}{2}$, $x = 129$ и графиком функции $y = \log_2 x$?

15.56. Найдите все целые значения n, для каждого из которых число $\log_{2n-1}(n^2 + 2)$ является рациональным.

15.57. Сократите дробь $\dfrac{1234567\overbrace{88\ldots87}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{99\ldots9}_{1999}87654321}$ до несократимой.

15.58. Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в одной из команд было ровно 4 мальчика и 3 девочки?

15.59. Билеты имеют номера от 000001 до 999999. Билет считается «счастливым», если первые три его цифры нечётны и различны, а вторые – чётны, причём цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует различных номеров «счастливых» билетов?

15.60. Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в два слоя по шесть карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче карандаша?

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ.
ГЛАВА I. ЧАСТЬ 2

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 1

Часть 2

13. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

Из неё следует, что $\sin^4 x = \frac{1}{4}\left(\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1\right)$.

Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3\cos 2x + 1 = 0;$$

$$\cos^2 2x + 4\cos 2x + 3 = 0.$$

Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$

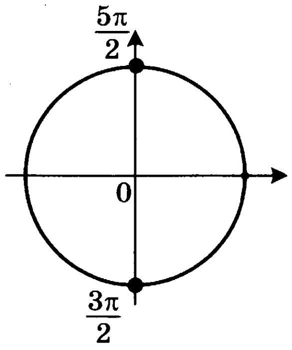
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$

$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$.

14. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен 45°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

Решение.

Площадь основания пирамиды равна 144 − 108 = 36, поэтому $AB = 6$.

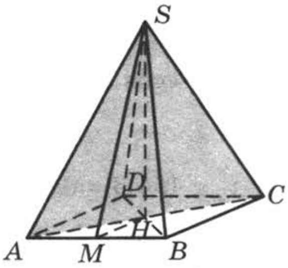
Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$.

Пусть SM — высота грани SAB. Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27$, поэтому $SM = 9$.

а) Пусть SH — высота пирамиды. Тогда H — середина основания пирамиды. Значит, SH — прямая, по которой пересекаются данные плоскости. Прямая SH перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости основания пирамиды, в том числе и прямым AH и MH. Значит, угол между плоскостями SAC и SMH — это угол AHM, который равен 45°.

б) Имеем $SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36$.



Ответ: б) 36.

15. Решите неравенство $7^{\ln\left(x^2-2x\right)} \le (2-x)^{\ln 7}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\ln\left(7^{\ln\left(x^2-2x\right)}\right) \le \ln\left((2-x)^{\ln 7}\right);$$

$$\ln 7 \cdot \ln\left(x^2-2x\right) \le \ln 7 \cdot \ln(2-x);$$

$$\ln\left(x^2-2x\right) \le \ln(2-x);$$

$$0 < x^2 - 2x \le 2 - x;$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ (x-2)(x+1) \le 0, \end{cases}.$$

откуда получаем, что $-1 \le x < 0$.

Ответ: $[-1; 0)$.

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение:

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB, поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1, у этих треугольников общая:

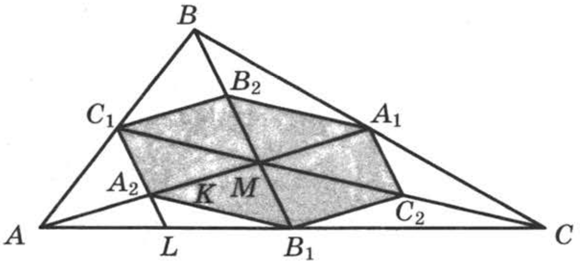
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

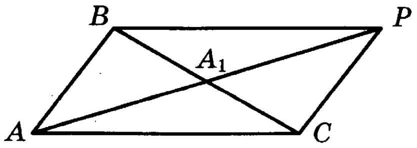
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2},\ S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2},\ S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2},\ S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC через a, b, c.



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2$, откуда $AA_1^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$.

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM, значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC: $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2\cdot\left(B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2\right) = \frac{2}{9}\left(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2\right) =$$
$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2\right) =$$
$$= \frac{1}{18}\cdot 3\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC, получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

17. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

Решение:

Заметим, что за 4 месяца Александр Сергеевич выплатит 1,1 млн рублей. Таким образом, он не покроет долг с процентами.

Каждый месяц долг увеличивается не более, чем на $1\,100\,000\cdot 0{,}01 = 11\,000$ рублей. Значит, за пять месяцев Александр Сергеевич должен будет выплатить не более $1\,100\,000 + 5\cdot 11\,000 = 1\,155\,000$ рублей, что менее чем $5\cdot 275\,000 = 1\,375\,000$ рублей. Таким образом, Александр Сергеевич сможет выплатить кредит за 5 месяцев.

Ответ: 5.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x - a^2 + a + 2\right| + \left|x - a^2 + 3a - 1\right| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4; 19).

Решение:

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$\left(x - a^2 + 3a - 1\right) - \left(x - a^2 + a + 2\right) = 2a - 3.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 3a - 1$, $n = x - a^2 + a + 2$.

Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \le 0 \le m$. Получаем

$$x - a^2 + a + 2 \le 0 \le x - a^2 + 3a - 1;$$

$$a^2 - 3a + 1 \le x \le a^2 - a - 2.$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу (4; 19), только если правая граница отрезка решений не больше 4 или левая граница не меньше 19. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \le a^2 - a - 2, \\ \left[\begin{array}{l} a^2 - a - 2 \le 4, \\ a^2 - 3a + 1 \ge 19; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a \ge 3, \\ \left[\begin{array}{l} a^2 - a - 6 \le 0, \\ a^2 - 3a - 18 \ge 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \ge 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} (a-3)(a+2) \le 0, \\ (a-6)(a+3) \ge 0; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} a \ge 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -3, \\ -2 \le a \le 3, \\ a \ge 6. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $1{,}5 \le a \le 3$; $a \ge 6$.

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна 36 − 14 = 22. Если добавить число 4, то разность будет равна 100 − 30 = 70, что ровно на 48 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} &(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2 = \\ &= 2a_n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + \\ &+ 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}) + \\ &+ \ldots + \\ &+ 2a_3(a_1 + a_2) + \\ &+ 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1}, то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=2(a_1+nd)\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n=(a_1+nd)(2a_1+(n-1)d)n,$$

где d — разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1+nd)(2a_1+(n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1440,$$

откуда $n \leq 11$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1+nd)(2a_1+(n-1)d)n=1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11$.

Если $n = 10$, получаем

$$(a_1+10d)(2a_1+9d)=144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90\cdot 4=360>144$.

Следовательно, $d=1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2+29a_1-54=0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n=9$, получаем

$$(a_1+9d)(2a_1+8d)=160.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72\cdot 4=288>160$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$a_1^2+13a_1-44=0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 8$, получаем:

$$(a_1+8d)(2a_1+7d)=180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56\cdot 4=224>180$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2+23a_1-124=0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 4.

Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; **б)** нет; **в)** 8.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 2

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

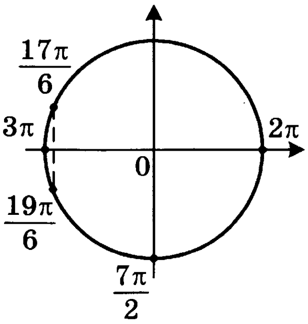
$$4^{2\sin x\cdot\cos x}=4^{-\sqrt{3}\sin x};$$

$$2\sin x\cdot\cos x=-\sqrt{3}\sin x;$$

$$\sin x=0 \text{ или } \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \text{ или } x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим: $x=2\pi$, $x=\frac{17\pi}{6}$, $x=3\pi$ $x=\frac{19\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi;\ \frac{17\pi}{6};\ 3\pi;\ \frac{19\pi}{6}$.

14. Площадь основания *ABCD* правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* равна 64, а площадь сечения пирамиды плоскостью *SAC* равна $32\sqrt{3}$.

а) Докажите, что угол между плоскостью основания пирамиды и боковым ребром равен $60°$.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

Сторона основания пирамиды равна 8. Тогда диагональ основания AC равна $8\sqrt{2}$.

Пусть SH — высота пирамиды, тогда угол между боковым ребром SA и плоскостью основания — это угол SAC.

а) Площадь треугольника SAC равна $\frac{1}{2}AC \cdot SH = 32\sqrt{3}$, откуда $SH = \frac{64\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} = 4\sqrt{6}$.

Следовательно, $\operatorname{tg} SAC = \frac{SH}{AH} = \frac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, а значит угол SAC равен $60°$.

б) Пусть SM — высота грани SAB. Тогда

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{96+16} = 4\sqrt{7}.$$

Следовательно, $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = 4\sqrt{7} \cdot 4 = 16\sqrt{7}$.

Поэтому площадь боковой поверхности равна $16\sqrt{7} \cdot 4 = 64\sqrt{7}$.

Ответ: $64\sqrt{7}$.

15. Решите неравенство $\frac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0$.

Решение.

Пусть $t = 2^{2-x^2} - 1$, тогда неравенство примет вид:

$\frac{t^2 - 4t + 3}{t^2} \geq 0$; $\frac{(t-1)(t-3)}{t^2} \geq 0$,

откуда $t < 0$; $0 < t \leq 1$; $t \geq 3$.

При $t < 0$ получим: $2^{2-x^2} - 1 < 0$; $2 - x^2 < 0$, откуда $x < -\sqrt{2}$; $x > \sqrt{2}$.

При $0 < t \leq 1$ получим: $0 < 2^{2-x^2} - 1 \leq 1$; $0 < 2 - x^2 \leq 1$, откуда $-\sqrt{2} < x \leq -1$; $1 \leq x < \sqrt{2}$.

При $t \geq 3$ получим: $2^{2-x^2} - 1 \geq 3$; $2 - x^2 \geq 2$, откуда $x = 0$.

Решение исходного неравенства:

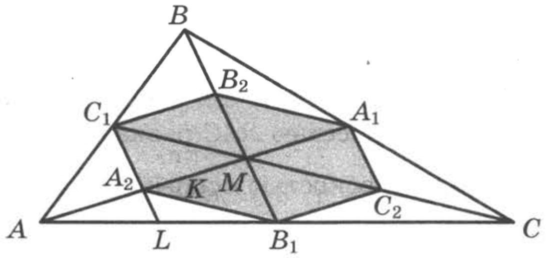
$x < -\sqrt{2}$; $-\sqrt{2} < x \leq -1$; $x = 0$; $1 \leq x < \sqrt{2}$; $x > \sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$; $\left(-\sqrt{2}; -1\right]$; 0; $\left[1; \sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.



Решение.

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB, поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1, у этих треугольников общая:

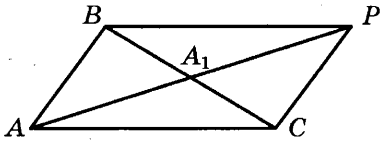
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2},\ S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2},\ S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2},\ S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем $S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}$.

б) Обозначим длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC через a, b, c.



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2$, откуда $AA_1^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$.

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM, значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC: $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2\cdot\left(B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2\right) = \frac{2}{9}\left(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2\right) =$$
$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2\right) =$$
$$= \frac{1}{18}\cdot 3\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC, получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}$.

Ответ: $\frac{43}{2}$.

17. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - x$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - x = (Sb - x)b - x = Sb^2 - (1 + b)x.$$

По условию двумя выплатами Дмитрий должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - (1 + b)x = 0$, откуда $x = \dfrac{Sb^2}{b+1}$.

При $S = 4\,290\,000$ и $a = 14{,}5$, получаем: $b = 1{,}145$ и

$$x = \frac{4\,290\,000 \cdot 1{,}311025}{2{,}145} = 2\,622\,050 \text{ (рублей).}$$

Ответ: 2 622 050.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23].

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 4a - 2) - (x - a^2 + 2a + 3) = 2a - 5.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 4a - 2$, $n = x - a^2 + 2a + 3$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \le 0 \le m$. Получаем:

$$x - a^2 + 2a + 3 \le 0 \le x - a^2 + 4a - 2;$$

$$a^2 - 4a + 2 \le x \le a^2 - 2a - 3.$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23], только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 \le a^2 - 2a - 3, \\ a^2 - 2a - 3 \ge 5, \\ a^2 - 4a + 2 \le 23; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a \ge 5, \\ a^2 - 2a - 8 \ge 0, \\ a^2 - 4a - 21 \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge 2{,}5, \\ (a - 4)(a + 2) \ge 0, \\ (a - 7)(a + 3) \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge 2{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} -3 \le a \le -2, \\ 4 \le a \le 7. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $4 \le a \le 7$.

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

пение.

а) Например, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов этих чисел равна 25 − 13 = 12. Если добавить число 4, то разность будет равна 81 − 29 = 52, что ровно на 40 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 =\\ &= 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) +\\ &+ 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) +\\ &+ \dots +\\ &+ 2a_3(a_1 + a_2) +\\ &+ 2a_2a_1.\end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1}, то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd)\frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d — разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1768,$$

откуда $n \leq 12$. Значит, 13 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1768$ следует, что n является делителем числа $1768 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 17$. Наибольший делитель, меньший 13, равен 8. При $n = 8$ получаем

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 221.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше, чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 221$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 165 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 5.

Значит, прогрессия из восьми чисел 5, 6, 7, ..., 12 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 2, 3; **б)** нет; **в)** 8.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 6

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\left(49^{\cos x}\right)^{\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

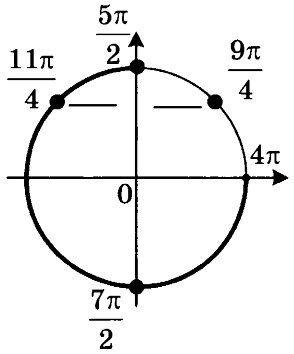
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$7^{2\cos x\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$; $2\sin x\cos x = \sqrt{2}\cos x$; $\cos x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0$; $\cos x = 0$ или $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберем корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.



Получаем: $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{2}$.

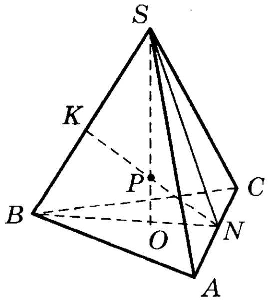
Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{2}$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

Решение:

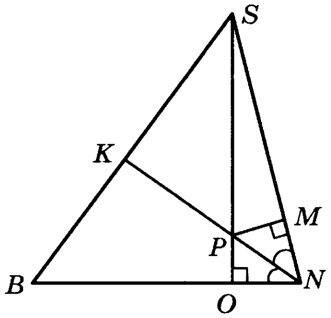


а) Точка O принадлежит отрезку BN, значит, точка P, лежащая на отрезке SO, находится в плоскости SBN. Поэтому прямая PN содержится в плоскости SBN и пересекает SB в точке K.

ΔSNB равнобедренный, поскольку отрезки SN и BN — медианы одинаковых равносторонних треугольников SAC и BAC. Поэтому $SN = BN$. В точке O пересекаются медианы основания, значит, $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$.

Опустим перепендикуляр из точки P на сторону SN. Пусть он пересекает SN в точке M. Треугольники SPM и SNO подобны, поэтому $\frac{SP}{PM}=\frac{SN}{ON}=3$.

Значит, $PM=\frac{1}{3}SP=PO$. Следовательно, треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB. В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, $NK\perp BS$.



б) Так как BS перпендикулярно NK, то искомое расстояние равно длине отрезка BK. Так как NK является медианой треугольника SNB, то $BK=\frac{1}{2}BS=2$.

Ответ: 2.

15. Решите неравенство $\frac{2x^2-8x}{x-7}\le x$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$x\left(\frac{2x-8}{x-7}-1\right)\le 0;$$

$$\frac{x(x-1)}{x-7}\le 0,$$

откуда $x\le 0$ или $1\le x<7$.

Ответ: $(-\infty;0]$; $[1;7)$.

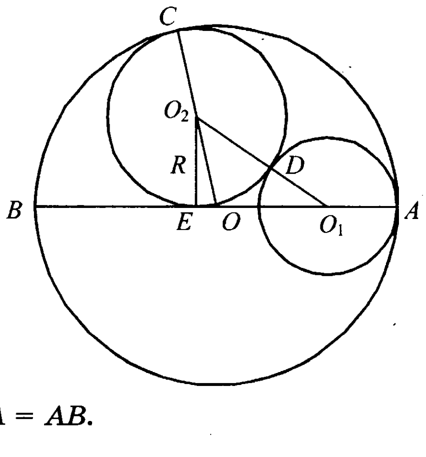
16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Решение:

а) Пусть AB — диаметр большей из трёх окружностей, O — её центр, O_1 — центр окружности радиуса r, касающейся окружности с диаметром AB в точке A, O_2 — центр окружности радиуса R, касающейся окружности с диаметром AB в точке C, окружности с центром O_1 — в точке D, отрезка AB — в точке E. Точки O, O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2=OC-O_2C=OC-R$. Аналогично $OO_1=OA-O_1A=OA-r$ и $O_1O_2=O_1D+O_2D=r+R$. Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен



$$OO_1+OO_2+O_1O_2=OA-r+OC-R+r+R=OA+OC=2OA=AB.$$

б) Пусть $OA = 6$, $r = 2$. Тогда

$$O_2E = R, O_1O_2 = 2 + R, OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4, OO_2 = OC - O_2C = 6 - R.$$

Из прямоугольных треугольников O_1O_2E и OO_2E находим, что

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2+R)^2 - R^2} = \sqrt{4+4R},$$

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6-R)^2 - R^2} = \sqrt{36-12R},$$

а так как $O_1E = OO_1 + OE$, то $\sqrt{4+4R} = 4 + \sqrt{36-12R}$. Из этого уравнения находим, что $R = 3$ (это значит, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трёх окружностей, то есть точка E совпадает с O).

Ответ: 3.

17. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение:

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - x$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - x = (Sb - x)b - x = Sb^2 - (1+b)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)x = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot x.$$

После четвертой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1 + b + b^2 + b^3)x = Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1} \cdot x.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1} \cdot x = 0$, откуда $x = \frac{Sb^4(b-1)}{b^4 - 1}$.

При $S = 6\,902\,000$ и $a = 12{,}5$, получаем: $b = 1{,}125$ и

$$x = \frac{6\,902\,000 \cdot 1{,}601806640625 \cdot 0{,}125}{0{,}601806640625} = 2\,296\,350 \text{ (рублей).}$$

Ответ: 2 296 350.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых любое число из отрезка $2 \le x \le 3$ является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

Решение:

Если $2a + 5 < 0$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $a = -2{,}5$. Тогда уравнение имеет вид

$$|x + 0{,}5| + |\,x + 0{,}5| = 0,$$

и ни одно число из отрезка [2, 3] не является его решением.

Пусть $a > -2{,}5$. Будем использовать геометрический подход и запишем уравнение в виде

$$x - (a + 2)| + |x - (-a - 3)| = 2a + 5.$$

Заметим, что при $a > -2{,}5$ верно неравенство $-a - 3 < a + 2$. Поэтому решением неравенства является любое число из отрезка $[-a - 3,\ a + 2]$: ведь длина этого отрезка равна $(a + 2) - (-a - 3) = 2a + 5$ и неравенству удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x = a + 2$; $x = -a - 3$ равна $2a + 5$. Осталось выбрать те значения a, при каждом из которых отрезок $[-a - 3,\ a + 2]$ содержит отрезок [2, 3]. Это выполнено тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} -a - 3 \le 2, \\ a + 2 \ge 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge -5, \\ a \ge 1; \end{cases} \quad a \ge 1.$$

Ответ: $a \ge 1$.

19. Пусть q – наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Решение:

а) Для чисел $x = 17$ и $y = 10$ выполняется условие $3x = 8y - 29$, $q = 170$, $d = 1$, $\frac{q}{d} = 170$.

б) и в) При $x = 1$ и $y = 4$ выполняется равенство $3x = 8y - 29$ и $\frac{q}{d} = 4$. Покажем, что никакое значение $\frac{q}{d} < 4$ не реализуется.

Если $x = y$, то $x = y = \frac{29}{5}$, что невозможно, поскольку числа x и y – натуральные. Пусть для определённости $x < y$ и $x = ad$, а $y = bd$. Тогда натуральные числа a и b взаимно просты и $a < b$. Получаем $q = \frac{xy}{d} = abd$, откуда $\frac{q}{d} = ab$.

Если $\frac{q}{d} = 1$, то $a = b$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 2$, то $a = 1$, $b = 2$ и, значит, $y = 2x$, откуда $x = \frac{29}{13}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 3$, то $a = 1$, $b = 3$ и, значит, $y = 3x$, откуда $x = \frac{29}{21}$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 4.

ОТВЕТЫ. ГЛАВА I

Тренировочная работа 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	5	30	0,25	−7	59	0,75	18	−4	4000	60	17

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$
14	б) 36
15	$[-1;0)$
16	$\frac{63}{2}$
17	5
18	$1,5\le a\le 3$; $a\ge 6$
19	а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8

Тренировочная работа 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	1	21	0,5	−8	58	0,25	5	−6	6000	56	51

13	а) πk; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{17\pi}{6}$; 3π; $\frac{19\pi}{6}$
14	б) $64\sqrt{7}$
15	$(-\infty;-\sqrt{2})$; $(-\sqrt{2};-1]$; 0; $[1;\sqrt{2})$; $(\sqrt{2};+\infty)$.
16	$\frac{43}{2}$
17	2 622 050
18	$4\le a\le 7$
19	а) 2, 3; б) нет; в) 8

Тренировочная работа 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	4	15	0,17	−9	0,8	6	6	−2	2,25	9	−8,25

13	а) $\left\{\left((-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)\middle\|n,k\in Z\right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$
14	б) $\operatorname{arctg}\frac{21}{17}$
15	$[0;\log_2 3]$
16	49
17	1 866 000 рублей
18	$[7-\sqrt{39};\ 7+\sqrt{39}]$; $[-5-\sqrt{15};\ -5+\sqrt{15}]$
19	а) нет; б) нет; в) 16

Тренировочная работа 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	5	12	0,125	−7	61	3	4	−2	6000	52	4

13	а) πn; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{17\pi}{6}$; 3π
14	б) 5
15	$[2; +\infty)$
16	2
17	3
18	$a\le -0,75$; $a\ge 0,75$
19	а) нет, б) нет, в) да

Тренировочная работа 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
32	5	7,5	0,5	25	124	6	6	−9	1200	53	20

13	а) $0; -\log_2 19$; б) $-\log_2 19$
14	б) $\frac{1}{4}$
15	$[2; 4)$
16	7
17	69 000 000 рублей
18	$\left[\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right]$
19	а) 17; б) 36; в) 18

Тренировочная работа 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10980	4000000	2,25	0,999	5	0,6	3	175	2	7	3	16

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{2}$
14	б) 2
15	$(-\infty; 0], [1; 7)$
16	3
17	2 296 350
18	$a\ge 1$
19	а) да; б) нет; в) 4

Тренировочная работа 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	1400	69	0,5	5	6	4	12	2	1	16	8

13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{8}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$
15	$(3+\log_9 7; +\infty)$
16	15
17	2005
18	0; $\frac{49}{16}$
19	а) да; б) нет; в) 33

Тренировочная работа 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	2	8	0,14	9	40	4	2	−8	5,5	6	6

13	а) $1 \pm \sqrt{3}$; б) $1-\sqrt{3}$
14	$\frac{\sqrt{5}}{5}$
15	$(4; 8]$
16	1 : 3
17	1 356 000 рублей
18	$-2 \le k < \sqrt{2}-2$ или $\sqrt{2}-2 < k \le 0$
19	а) нет, б) да (225, 3375, 225), в) 479

Тренировочная работа 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
26	4	5	0,04	2	6	0,75	168	14	40	4	−5

13	а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$
14	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
15	$(5; 7), (7; 10)$
16	$\frac{ac}{b}$
17	300 кг
18	$a < \frac{3-\sqrt{57}}{4}$; $a > \frac{3+\sqrt{57}}{4}$
19	а) нет, б) нет, в) да

Тренировочная работа 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
42	28	16	0,6	−3	24	0,25	8	20	5	48	17

13	а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ -\operatorname{arctg}3+\pi k$, где $k\in Z$; б) $2\pi-\operatorname{arctg}3; \frac{9\pi}{4}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$
15	$[1; \log_2 5]$
16	1 : 6
17	1 488 000 рублей
18	$-24 < a < 18$
19	а) нет, б) нет, в) да

Тренировочная работа 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4500	6	0,58	16	122	0,25	4	2	14	140	−7

13	а) $2\pm\sqrt{5}$; б) $2-\sqrt{5}$
14	0,5
15	$(-\infty; 1], (2; 3)$
16	98
17	44 000 рублей
18	$\frac{1}{2} < k < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ или $k > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$
19	а) 7; б) 5002; в) 5054

Тренировочная работа 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
63	28	7	0,505	7	1	5	252	−0,75	17,67	21	−2

13	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ (-1)^{m+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi m,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2},\ 2\pi-\arcsin\frac{2}{3},\ \pi+\arcsin\frac{2}{3}$
14	б) 3 : 4
15	$(-\infty; -3], [-2; 5)$
16	19
17	2 034 000 рублей
18	$x = 0$ при $a = 0$ или $a = 1$
19	а) Например, 54 и 63; б) нет; в) 117 или 119

Тренировочная работа 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	3	5	0,17	45	21	7	6	−2	12	53	44

13	а) $2\pm\sqrt{6}$; б) $2-\sqrt{6}$
14	а) 1 : 6; б) $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{2}}{3}$
15	$(2; 3]$
16	$4\sqrt{2}$
17	6 330 000
18	$(-9; -2]; [3; +\infty)$
19	а) например, 15 раз число 19 и число 78; б) нет; в) 1650

Тренировочная работа 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	25	10	0,5	2	36	10	160	2	25	6	16

13	а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$
14	192
15	$[-2; 2]$
16	4 : 21
17	3
18	$a = 2$
19	а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$

Тренировочная работа 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	25	30	0,25	2	42	0,75	4	−2	6	84	15

13	а) 0; 4; б) 0
14	2
15	$(-4; -3), (-1; 3)$
16	1:10
17	240 кг
18	$\left(-1-\frac{\sqrt{30}}{4}; -\frac{3}{8}\right]; \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
19	а) Да, например, числа 4, 5 и 8. б) Нет. в) $\frac{28}{19}$

Тренировочная работа 16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	6	96	0,8	42	34	4	34	2	7	10	–2

13	$x = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
14	$2\sqrt{7}$
15	$[-4; -1), (-1, 0), (0, 1), (1; 4]$
16	9 : 7
17	1 066 500 рублей
18	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$
19	а) да; б) нет; в) 5

Тренировочная работа 17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	4000000	9	0,375	–1,5	99	–2	15	0,4	75	63	23

13	а) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{7} + 2\pi m$, n, $m \in \mathbb{Z}$; б) 0, $\pm\arccos\frac{1}{7}$
14	а) $\frac{4}{3}$; б) 7,2
15	$(-\infty; 0), \left[2; \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right), [5; +\infty)$
16	68
17	5400
18	$a = -\frac{9}{4}$, $a = 0$, $a = \frac{1}{12}$
19	а) 14; б) 90; в) 1

Тренировочная работа 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	30	18	0,2	–8	18	–4	4	50	15	63	–0,75

13	а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$
14	$\frac{\pi}{3}$
15	$(-2; -1] \cup (1; 2)$
16	$\frac{17 - 4\sqrt{13}}{3}$
17	1 620 000 рублей
18	$a = 2{,}5$
19	а) да; б) нет; в) 31

Тренировочная работа 19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
356	6	5	0,5	−11	2	2	7	−5	90	4	1

13	а) $\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{2}{5},\ -2\pi+\arccos\frac{2}{5}$
14	а) 2 : 3; б) $\frac{4}{\sqrt{41}}$
15	$(-4,2;\,-3,95],\,[-0,2;\,+\infty)$
16	1,92
17	12
18	$-\frac{1}{12}<a<0$ или $0<a<\frac{1}{12}$
19	а) нет; б) да; в) 12

Тренировочная работа 20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	8	9	0,99	69	6	0,25	32	0,75	6000	9	9

13	а) $2\pi n,\ \pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{1}{6},\ -2\pi+\arccos\frac{1}{6}$
14	а) 13; б) $\frac{12}{5}$.
15	$[\log_3 30;\ 4]$
16	$\frac{24}{5}\sqrt{6}$
17	104 500 рублей
18	$-\frac{9}{4}<a<2$
19	а) Да, например, если $a=10,\ b=20,\ c=11$ и $d=37$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$

Тренировочная работа 21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2420	4500	20	0,98	8	3	0,25	84	20	400	120	9

13	а) $2\pi n,\ \pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{1}{6},\ -2\pi+\arccos\frac{1}{6}$
14	б) $\frac{10}{7}$
15	$(-\infty;\,-2];\ 0;\ [1;\,5]$
16	289
17	119
18	$-\frac{9}{4}<a\le -2$
19	а) Например, последовательность $1, 28, 46, 58$; б) нет; в) 2

Тренировочная работа 22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
318,6	6	5	0,4	6	60	2	343	2	9,8	40	181

13	а) $\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{2}{5}$, $-2\pi+\arccos\frac{2}{5}$
14	б) 1 : 2
15	$[\log_2 7; 6]$
16	$\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$
17	300 000 рублей
18	$x = 0$ при $a = 4$
19	а) Да, например, числа 7, 10 и 13; б) нет; в) $\frac{35}{24}$

Тренировочная работа 23

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	0,8	10,5	0,25	−20	0,8	3	4	12	1000	40	−18

13	а) −4; 0 б) 0
14	б) $\frac{21}{16}$
15	$(-6; -4], [4; +\infty)$
16	13
17	90 кг
18	$0 \le k < \frac{4\sqrt{2}-2}{21}$ или $\frac{4\sqrt{2}-2}{21} < k \le \frac{1}{3}$
19	а) Да, например, числа 10, 11 и 15. б) Нет. в) $\frac{25}{17}$

Тренировочная работа 24

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6000	9	2,25	0,012	1,5	99	2	20	9	8,39	30	9

13	а) $\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$
14	$\frac{\pi}{3}$
15	$(-\infty; -1], 0, [2; 6)$
16	$2\sqrt{7}$
17	86000 рублей
18	$\left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$
19	а) 36; б) 72; в) 1

Тренировочная работа 25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	5	10	0,26	−6	155	1	6	−22	8	15	7

13	а) $-\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ -\operatorname{arctg} 3+\pi m,\ n,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi-\operatorname{arctg} 2,\ -\pi-\operatorname{arctg} 3$
14	б) 1
15	$[-9;-2),(-2,-1),(-1,0),(0;7]$
16	$1:15$
17	6
18	$\left(-\infty;-\frac{9}{16}\right)$
19	а) например, подходит последовательность $2,4,5,5,4$; б) нет; в) при $n=82$

Тренировочная работа 26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16000	30	5	0,96	−1	120	3	240	2	400	10	−4

13	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \operatorname{arctg}\frac{3}{7}+\pi k;\ n,k \in \mathrm{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4},\ 2\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{7}$
14	14
15	$(-4,2;-3,95],\ [3,8;+\infty)$
16	$\frac{85}{3}$
17	3
18	$\left(\frac{16}{5};+\infty\right)$
19	а) да; б) нет; в) 26

Тренировочная работа 27

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	5	10,5	0,375	−1	11	−0,5	175	−0,4	1,6	53	8

13	а) $\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$; б) $-5\pi;\ -4\pi$
14	б) 105
15	$[-1;4)$
16	0,96
17	12,5
18	$\left(-\infty;-\frac{9}{40}\right)$
19	а) Например, 50 и 60; б) нет; в) 108 или 110

Тренировочная работа 28

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3680	4	21	0,375	7	56	3	312	−5	0,81	10	4

13	а) 1; $\log_2 6$; б) $\log_2 6$
14	$\frac{2}{3}$
15	$(3;4),[5;6),(6;7]$
16	$\frac{96}{7}\sqrt{3}$
17	3 000 000 рублей
18	$a \le -0{,}75$; $a \ge 0{,}75$
19	а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$

Тренировочная работа 29

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
23	11	2	0,2	2	28	0,5	112	535	5,5	7	1

13	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
14	80
15	$(-\infty; -3], [-2; 5)$
16	$3\sqrt{5}$
17	165 кг
18	$\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]; [8; +\infty)$
19	$n = 0$, $x = 3$; $n = 0$, $x = -3$

Тренировочная работа 30

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	2	19	0,25	−13	55	3	16	34	0,75	9,6	−5

13	а) $2\pi k$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$
14	б) $\frac{88\sqrt{15}}{27}$
15	$(1; 2]$
16	$\frac{15}{2}\sqrt{15}$
17	2008
18	$(-\infty; 0)$
19	а) Да, например, если $a = 10$, $b = 50$, $c = 15$ и $d = 45$; б) нет; в) $\frac{291}{59}$

ОТВЕТЫ. ГЛАВА II.

Задания части 2

1.1. $x = \pm 3$.

1.2. $x = 0,\ x = 2$.

1.3. $x = -4,\ x = -2$.

1.4. $x = 1,\ x = \frac{5}{3}$.

1.5. решений нет.

1.6. $x = 1\ ,\ x = 2010$.

1.7. $x = -1,\ x = 2011$.

1.8. $x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2},\ x = \pm 1$.

1.9. $x = \pm\sqrt{3}$.

1.10. $x = -\sqrt[3]{3}, x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

1.11. $x = -2\ ,\ x = 4$.

1.12. $x = -1$.

1.13. $x = 3$.

1.14. $x = -1\ ,\ x = 1$.

1.15. $x = -4\ ,\ x = 2$.

1.16. $x = 1,\ x = 6$.

1.17. $x = 1\ ,\ x = 12$.

1.18. $x = -1,\ x = 5,\ x = 2 \pm \sqrt{21}$.

1.19. $1 \le x \le \frac{5}{3}$.

1.20. $x < -3,\ x > \frac{2}{3}$.

1.21. $1 < x < 2010$.

1.22. $x \le -2011,\ x \ge -1$.

1.23. x — любое.

1.24. решений нет.

1.25. $x = 3/2$.

1.26. $-\frac{5\sqrt{2}}{2} < x < -1, \quad 1 < x < \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

1.27. $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

1.28. $x < -\sqrt[3]{3},\ x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

1.29. $-\frac{4}{5} < x < \frac{1}{3}$.

1.30. $x < -\frac{5}{3},\ x > -\frac{3}{2}$.

1.31. $(1;2) \cup (2;3)$.

1.32. $(-\infty;-1) \cup (-1;0) \cup (2;+\infty)$.

1.33. $x < -4, \quad 0 < x < 1$.

1.34. $(-\infty;-1) \cup (0;5)$.

1.35. x — любое.

1.36. $x \le 3,\ x \ge 5$.

1.37. $-3 < x < -2$.

1.38. $-8 \le x \le -\frac{5}{2}$.

1.39. $(-\infty;-7) \cup (-7;-\frac{1}{2}) \cup (1;+\infty)$.

1.40. $(-\infty;-5) \cup (1;2) \cup (6;+\infty)$.

1.41. $-1 < x < 6$.

1.42. $(-5;1) \cup \{5\}$.

1.43. $[1;3) \cup (3;4]$.

1.44. $(-1-\sqrt{2};-2) \cup (-2;-1+\sqrt{2}) \cup (2$

1.45. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right] \cup (2;+\infty)$.

1.46. $-7 < x < -3$.

1.47. $(-\infty;-4) \cup (-1;+\infty)$.

1.48. $(-\frac{9}{2};-2) \cup (3;+\infty)$.

1.49. $(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$.

1.50. $0<x\le 5;\ x\ge 12$.

1.51. $x<0,\ 0<x<1$.

1.52. $-1<x$.

1.53. $-6\le x<-5,\ x\ge 1$.

1.54. $[2;4]\cup(6;+\infty)$.

1.55. $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(\frac{3}{2};+\infty)$.

1.56. $x<-3$.

1.57. $(-\infty;-23)\cup(20;+\infty)$.

1.58. $x<-\sqrt{2},\ x>\sqrt{2}$.

1.59. $-1<x<0,\ x>0$.

1.60. $-4<x<-3$.

1.61. $-5\le x<-2,\ -2<x\le 1$.

1.62. $x<-3,\ x>5$.

1.63. $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.

1.64. $(-1;0)\cup(0;1)$.

1.65. $(-6;0)$.

1.66. $(-\infty;-\frac{8}{3})\cup(-\sqrt{7};2)\cup(\sqrt{7};+\infty)$.

1.67. $[-4;-3)\cup(-2;1]$.

1.68. $x\le -\frac{11}{2},\ -1<x<-\frac{2}{3},\ x>9$.

1.69. $(-1;-\frac{\sqrt{737}-11}{28})\cup(-\frac{4}{7};\frac{11+\sqrt{737}}{28})$.

1.70. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

1.71. $(-1-\sqrt{2};-1)\cup(0;\sqrt{2}-1)\cup(1;+\infty)$.

1.72. $(-8;-2)\cup(-1;0)$.

1.73. $(1;2)\cup(3;+\infty)$.

1.74. $(-\infty;-1]\cup[1;2]\cup[4;+\infty)$.

1.75. $[-3;-2)\cup[-1;0)\cup[1;+\infty)$.

1.76. $-9<x\le -3,\ -1<x<0,\ x\ge 3$.

1.77. $-3<x<-2,\ -1\le x\le 5$.

1.78. $0<x\le 1,\ 6<x<7$.

1.79. $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

1.80. $x\le -4,\ -3\le x<-\frac{11}{4},\ -\frac{11}{4}<x\le -2,\ x\ge 1$.

2.1. $x=\frac{1}{5},\ x=1$.

2.2. $x=-\sqrt{\frac{7}{3}},\ x=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

2.3. $x=5$.

2.4. $x=3$.

2.5. $x=3$.

2.6. $x=5$.

2.7. $x=-3$.

2.8. $x=1$.

2.9. $x=0$.

2.10. $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

2.11. $x=4$.

2.12. $x=-27,\ x=8$.

2.13. $x=2$.

2.14. $x=-\frac{5}{3}$.

2.15. $x=0,\ x=\frac{3}{2}$.

2.16. $x=-5$.

2.17. $x=5$.

2.18. $x=1$.

2.19. $x=\sqrt{3}$.

2.20. $x=4$.

2.21. $x=9$.

2.22. $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2.23. $x=8$.

2.24. $x=3$.

2.25. $x=-1,\ x=\frac{8}{3}$.

2.26. $x=-7$.

2.27. $x = 0,\ x = 1,\ x = 9$.

2.28. $x = 2\frac{1}{63},\ x = 2\frac{1}{728}$.

2.29. $5 \le x \le 10$.

2.30. $x = \frac{1}{2},\ x = \frac{1}{5},\ x = \frac{4}{5}$.

2.31. $x = -1,\ x \ge 2$.

2.32. $\frac{3}{2} < x \le 3$.

2.33. $2 < x \le 4$.

2.34. $1 - \sqrt{5} < x \le -1,\ \ 3 \le x < 1 + \sqrt{5}$.

2.35. $x < \frac{1}{2}$.

2.36. $-2 < x \le 2$.

2.37. $x > -1$.

2.38. $-30 \le x < 6$.

2.39. $5 < x$.

2.40. $\frac{5}{2} \le x < 3$.

2.41. $-1 \le x < -\frac{3}{5},\ 0 < x \le 1$.

2.42. $x \le -1$.

2.43. $x \le -5,\ -\frac{4}{3} \le x < 4$.

2.44. $x > -1$.

2.45. $x < -\frac{5}{3},\ x > 1$.

2.46. $3 < x$.

2.47. $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \le x < -1$.

2.48. $1 \le x < \frac{3}{2}$.

2.49. $\frac{16}{3} \le x < 8$.

2.50. $-\frac{\sqrt{13} - 1}{6} < x \le 1,\ x \ge 2$.

2.51. $-1 \le x \le 1$.

2.52. $1 \le x$.

2.53. $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x \le 4$.

2.54. $-8 < x \le 1$.

2.55. $1 < x < \frac{5}{4},\ \ \frac{5}{3} < x$.

2.56. $1 < x < 2,\ \ 2 < x < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

2.57. $-5 \le x \le 0$.

2.58. $-1 - \sqrt{13} \le x \le 0,\ \ \ \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \le x \le \sqrt{13} - 1$.

2.59. $x > \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

2.60. $-3 \le x < 2\sqrt{\sqrt{5} - 2} - 2$.

3.1. $x \ge -2$.

3.2. $x = -\frac{4}{3}$.

3.3. $x = -\frac{13}{4},\ x = \frac{9}{2}$.

3.4. $x = -4,\ x = 4$.

3.5. $x \le \frac{5}{2}$.

3.6. $x = -2,\ x = 2$.

3.7. $x = -1,\ x = 11$.

3.8. $x = -3,\ x = -4$.

3.9. $x = -4,\ x = -1$.

3.10. $x = -1,\ x = 1$.

3.11. $x = 1, x = 3$.

3.12. $x = -\frac{70}{13}, x = -\frac{13}{2}, x = 0$.

3.13. $x = -3, x = 25$.

3.14. $x \le -2$.

3.15. $-\frac{4}{7} \le x$.

3.16. $x = 2$.

3.17. $-6 \le x \le 0, x = 12$.

3.18. $x = -1$.

3.19. $-\frac{15}{2} \le x \le \frac{7}{2}$.

3.20. $x = -4, x = -1$.

3.21. $-3 < x < -2$.

3.22. $x \le -\frac{3}{2}, x \ge -\frac{1}{6}$.

3.23. $-6 < x < -3, \ -2 < x < 1$.

3.24. $x \le -2, x \ge 2$.

3.25. $x < -3, x > -\frac{1}{3}$.

3.26. $x \le 1$.

3.27. $x < -5, x > 2$.

3.28. $x < -\frac{9}{2}$.

3.29. $-4 < x < -2, \ 2 < x < 4$.

3.30. $-3 \le x \le 3$.

3.31. $-3 \le x \le -1$.

3.32. $-4 < x < -2$.

3.33. $-3 \le x \le -1$.

3.34. $x \le -\frac{4+\sqrt{19}}{3}, x \ge \frac{\sqrt{19}-4}{3}$.

3.35. $-3 < x < -1$.

3.36. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x < 0, 0 < x < 1$.

3.37. $\frac{3-\sqrt{73}}{4} \le x < -1, -1 < x \le -\frac{1}{2}, x \ge 2$.

3.38. $x < 2, 2 < x < 6, x \ge 8$.

3.39. $x < -4, x = -3, x > -2$.

3.40. $\frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}$.

3.41. $-27 < x < -1, x = -1, 0 < x < 1$.

3.42. $0 < x < -9$.

3.43. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

3.44. $-5 < x < -2$.

3.45. $-3 - 2\sqrt{2} < x < 5$.

3.46. $x \le 2 - \sqrt{2}, x \ge 5 + \sqrt{19}$.

3.47. $-4 < x < -3, 2 < x < 7$.

3.48. $x \le 0, 1 \le x \le 6$.

3.49. $x < -2 - 2\sqrt{3}, x > -2\sqrt{2}$.

3.50. $-3 < x < \frac{3+\sqrt{65}}{2}$.

3.51. $-\frac{9+\sqrt{57}}{4} < x < -2, -2 < x < -1, x > \frac{3}{2}$.

3.52. $-200 < x < 66, x > 199$.

3.53. $x < -2, x > 0$.

3.54. $2 - \sqrt{3} \le x < 2, \ 4 < x \le 5$.

3.55. $x < 1, x > 2$.

3.56. $-5 < x < -3, \ -3 < x < -2, \ 2 < x < 5$.

3.57. $-2 < x \le -\frac{3}{2}$.

3.58. $x > -3$.

3.59. $x \le 0, x \ge 1$.

3.60. $x \le -\frac{5}{2}, -\frac{8}{5} \le x \le 0$.

4.1. $x \in \varnothing$.

4.2. $x = (-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z}$ $\quad (\arcsin\frac{\pi}{6} \ne \frac{1}{2}!)$.

4.3. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, x = \pm\frac{\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.4. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.5. $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.6. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.7. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z}$.

4.8. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.9. $x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$.

4.10. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

4.11. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

4.12. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.13. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = \frac{2\pi}{5}n, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}m, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}$.

4.14. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = arctg 3 + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.15. $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4.16. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.17. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.18. $x = (2k+1)\pi, x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.19. $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

4.20. $x = \frac{1}{3} + \frac{4k+1}{12}\pi, x = \frac{1}{6} + \frac{2n+1}{24}; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.21. $x = -\arccos\frac{4}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4.22. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{7\pi}{10} + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.23. $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{12} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.24. $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

4.25. $x = -arctg(2 \pm \sqrt{3}) + k\pi = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.26. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4.27. $x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, x = n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.28. $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + k\pi, x = -\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.29. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$.

4.30. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}; k, n \in \mathbb{Z}$.

4.31. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

4.32. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{10} + n\pi, x = \pm\frac{3\pi}{10} + m\pi; k, n, m \in \mathbb{Z}$.

4.33. $x = -arctg\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4.34. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4.35. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad k, n \in \mathbb{Z}.$

4.36. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + n\pi, x = -arctg\frac{1}{3} + m\pi; k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.37. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.38. $x = -2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.39. $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.40. $x = \frac{2n+1}{18}\pi; n \in \mathbb{Z}, n \neq 9k + 4, k \in \mathbb{Z}.$

4.41. $x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 4n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.42. $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

4.43. $x = \pm 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}; k = 0, 1, 2, \ldots$

4.44. $x = \pm\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

4.45. $x = \operatorname{arctg}\frac{2k + 1 \pm \sqrt{4k^2 + 4k - 15}}{4} + n\pi, \ x = \pm\operatorname{arctg} 2 + m\pi; k = 3, \pm 4, \pm 5, \ldots, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.46. $x = -\sin 1.$

4.47. $x = \cos 2.$

4.48. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

4.49. $x = 1, x = 0.$

4.50. $x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

4.51. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.52. $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.53. $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.54. $2k\pi \leq x < \arccos\frac{1}{4} + 2k\pi, \ \arccos\frac{1}{5} + 2n\pi < x < -\arccos\frac{1}{5} + 2(n+1)\pi,$

$-\arccos\frac{1}{4} + 2(m+1)\pi < x \leq 2(m+1)\pi; k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.55. $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \leq x \leq \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$

4.56. $\frac{\pi}{8} + k\pi < x < -\frac{\pi}{8} + \frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$

4.57. $(2k+1)\pi x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ \arccos(\frac{2}{3} + \sqrt{2}) + 2n\pi < x < \arccos(\frac{2}{3} - \sqrt{2}) + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.58. $2k\pi < x < (2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}.$

4.59. $-1 \leq x \leq -\frac{7}{8}, x = 1.$

4.60. $x \leq \frac{4\pi + 18}{5}, \ 8\pi - 18 \leq x \leq 18 - 3\pi.$

5.1. $x = -4, x = -2.$

5.2. $x = \frac{1}{2}.$

5.3. $x = -\frac{38}{3}.$

5.4. $x = -2 \pm \sqrt{7/2}.$

5.5. $x = 1.$

5.6. $x = -1.$

5.7. $x = 2.$

5.8. $x = 7.$

5.9. $x = 1.$

5.10. $x = 1.$

5.11. $x = 2.$

5.12. $x = 2.$

5.13. $x = -1.$

5.14. $x = -2, x = 2.$

5.15. $x = -3$.

5.16. $x = 3$.

5.17. $x = -3, x = -1$.

5.18. $x = 2$.

5.19. $x = 0$.

5.20. $x = 0$.

5.21. $x = 0$.

5.22. $x = 0$.

5.23. $x = -2$.

5.24. $x = \log_{2/5} 3$.

5.25. $x = -2, x = -1$.

5.26. $x = \log_{(\sqrt{5}-1)/2}(2/3)$.

5.27. $x = 0, x = 2$.

5.28. $x = -\frac{1}{4}$.

5.29. $x = -1, x = 1$.

5.30. $x = -2, x = 2$.

5.31. $-\frac{1}{2} < x$.

5.32. $x > -\frac{3}{4}$.

5.33. $x < 7$.

5.34. $x < -\frac{1}{2}, x > \frac{5}{8}$.

5.35. $x < 0, 1 < x < 3$.

5.36. $x < -3 - \sqrt{3}, x > -3 + \sqrt{3}$.

5.37. $-\frac{1}{3} < x < 0$.

5.38. $-4 < x < -1$.

5.39. $x \neq -\frac{1}{2}$.

5.40. $x < -1, x > -\frac{1}{2}$.

5.41. $x < -\frac{1}{3}, x > 4$.

5.42. $x \geq -2$.

5.43. $-1 < x < 0$.

5.44. $x < 0$.

5.45. $x > -\frac{1}{\lg 5}$.

5.46. $x > -3$.

5.47. $x < 0, x > \log_4 3$.

5.48. $x > \frac{1}{2}$.

5.49. $-\frac{2}{3} < x < 1$.

5.50. $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

5.51. $x \in \mathbb{R}$.

5.52. $x \leq -1, x > 0$.

5.53. $0 < x < \log_{2/3}(1/3)$.

5.54. $x \leq \log_3(1/2), \log_3(3/5) \leq x < \log_3(5/3)$.

5.55. $x < 0$.

5.56. $x > 4 + \frac{\lg 14}{\lg 5 - \lg \sqrt{7}}$.

5.57. $x < \log_{0,4} 2$.

5.58. $x < \log_{2/5} 5$.

5.59. $0 < x < \frac{1}{2}$.

5.60. $\frac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5$.

6.1. $x = 2$.

6.2. $x = 100$.

6.3. $x = 4$.

6.4. $x = 2$.

6.5. $x = \frac{3}{2}, x = 10$.

6.6. $x = 4$.

6.7. $x = \dfrac{3 + 3\sqrt{141}}{10}$.

6.8. $x = 2$.

6.9. $x = 1$.

6.10. $x = -3$.

6.11. $x = 2$.

6.12. $x = \sqrt[3]{2} - 1$.

6.13. $x = -4$.

6.14. $x = -1$.

6.15. $x = 10,\ x = 100\,000$.

6.16. $x = \dfrac{1}{2},\ x = 4$.

6.17. $x = 10^{-1},\ x = 10^{-1/8}$.

6.18. $x = 1,\ x = 256$.

6.19. $x = \dfrac{1}{27},\ x = 3$.

6.20. $x = \dfrac{1}{2},\ x = 16$.

6.21. $x = 2^{-2},\ x = 2^{-1/4}$.

6.22. $x = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3},\ x = 10$.

6.23. $x = -\dfrac{24}{5},\ x = 20$.

6.24. $x = 1,\ x = 2 - 2\sqrt{2}$.

6.25. $x = \dfrac{1}{9},\ x = 3$.

6.26. $x = 0$.

6.27. $x = -2,\ x = \sqrt{33} - 1$.

6.28. $x = 4$.

6.29. $x = 8$.

6.30. $x = 4$.

6.31. $x > 4$.

6.32. $\dfrac{1}{7} < x < \dfrac{2}{7}$.

6.33. $-3 < x < -2$.

6.34. $-4 < x < -3,\ -2 < x < -1$.

6.35. $-5 \le x < -3,\ -1 < x \le 1$.

6.36. $\dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{1}{2}$.

6.37. $\dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{2}{3}$.

6.38. $x \in \varnothing$.

6.39. $-\sqrt{5} < x < -1,\ 2 < x < \sqrt{5}$.

6.40. $-3 < x < -2$.

6.41. $1 < x \le 2,\ 3 \le x < 4$.

6.42. $0 \le x < 2$.

6.43. $x < -4$.

6.44. $1 < x < 2,\ x > 2$.

6.45. $-4 < x \le -2,\ -\dfrac{5}{8} \le x < 0$.

6.46. $\dfrac{1}{4} \le x \le 2$.

6.47. $0 < x \le \dfrac{1}{3},\ 3 < x \le 9$.

6.48. $\dfrac{1}{2} < x < 1,\ 1 < x < 2$.

6.49. $0 < x < 10,\ x = 100$.

6.50. $0 < x < 1,\ \sqrt{3} < x < 9$.

6.51. $\dfrac{1}{2} \le x < 1$.

6.52. $-2 < x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 2$.

6.53. $-3 < x < 1,\ 3 < x < 4$.

6.54. $0 < x < 2,\ x > 4$.

6.55. $0 < x < \dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 1 < x < 3$.

6.56. $1 < x < 4$.

6.57. $2 < x < 5$.

6.58. $0 < x < 1$.

6.59. $x > 2$.

6.60. $-3 < x < 77$.

6.61. $-1 < x \leq -\dfrac{26}{27}$.

6.62. $-2 < x < -\sqrt{3},\ \sqrt{3} < x < 2$.

6.63. $4 < x < 5,\ x > 7$.

6.64. $-10^{(\lg 0{,}5 \cdot \lg 3)/\lg 1{,}5} < x < 0,\ 0 < x < 10^{(\lg 0{,}5 \cdot \lg 3)/\lg 1{,}5}$.

6.65. $x > 2$.

7.1. $x = -\dfrac{4}{5},\ x = -\dfrac{6}{5}$.

7.2. $x \leq -2010,\ x \geq 2011$.

7.3. $\dfrac{3}{4} < x \leq 7$.

7.4. $x \leq -\dfrac{7}{8},\ x \geq 0$.

7.5. $0 \leq x < 64$.

7.6. $x \leq 1,\ x = 3$.

7.7. $x \leq \log_2(\sqrt{2} - 1),\ x > \dfrac{1}{2}$.

7.8. $x \leq \log_3 2, 1 < x < 5$.

7.9. $x < -1,\ 0 < x < 1$.

7.10. $0 < x < \dfrac{1}{2}$.

7.11. $-3 < x < -2,\ -\dfrac{1}{2} < x < 0$.

7.12. $x = 2 + \sqrt{10}$.

7.13. $-\sqrt{2} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{2}$.

7.14. $x > 0$.

7.15. $-1 < x < -\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$.

7.16. $x < 0$.

7.17. $x = -\dfrac{5}{2},\ x = \dfrac{1}{2}$.

7.18. $x < -3,\ x > 3$.

7.19. $x < -7,\ \dfrac{17}{9} < x < 2$.

7.20. $-\dfrac{127}{128} \leq x < -\dfrac{63}{64},\ -\dfrac{3}{4} < x \leq -\dfrac{1}{2}$.

7.21. $1 < x \leq 1 + \mathrm{tg}(3\pi/16)$.

7.22. $x < -2$.

7.23. $x = \sqrt{10^{1-\sqrt{3}}},\ x = \sqrt{10^{1+\sqrt{3}}}$.

7.24. $x = \dfrac{1}{10},\ x = 10$.

7.25. $x > 1000$.

7.26. $\dfrac{1}{10} < x < 100$.

7.27. $0 < x < 999$.

7.28. $0 < x \leq \dfrac{1}{4},\ x \geq 4$.

7.29. $0 < x \leq 3^{-2\sqrt{3}},\ x \geq 3^{2\sqrt{3}}$.

7.30. $1 < x \leq 5^{\log_2 7} = 7^{\log_2 5}$.

7.31. $x = 10,\ x = 10^4$.

7.32. $x = \dfrac{1}{81},\ x = \dfrac{1}{3}$.

7.33. $0 \leq x \leq \dfrac{27}{16}$.

7.34. $x = 2$.

7.35. $x < 2$.

7.36. $x = -2$.

7.37. $x = 9$.

7.38. $-2 < x < -1,\ 1 < x < 2$.

7.39. $x = \log_5 4$.

7.40. $-2 < x \leq -\log_3 \dfrac{9}{10}$.

7.41. $-5 < x < 1-\sqrt{5},\ 3 < x < \sqrt{5}+1.$

7.42. $-1 < x \le 0.$

7.43. $x < -\log_3 10.$

7.44. $\log_2(5/4) < x < \log_2 3.$

7.45. $0 < x < 2,\ x \ge 4.$

7.46. $\dfrac{1-\sqrt{41}}{5} \le x < -1,\ 1 < x \le 2\sqrt{2}.$

7.47. $0 < x \le \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}},\ x > 1.$

7.48. $0 < x \le \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{2} \le x < 2.$

7.49. $x = 3,\ x \ge 8.$

7.50. $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$

7.51. $x = -\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

7.52. $x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ x = \pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2n\pi}{3};\ k,n \in \mathbb{Z}.$

7.53. $x = \pm\arcsin\dfrac{\lg 3}{\lg(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.54. $x = \dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{5\pi}{3}.$

7.55. $x = \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.56. $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6}+2n\pi;\ k,n \in \mathbb{Z}.$

7.57. $x = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ x = \dfrac{3\pi}{4}+2n\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6}+2m\pi;\ k,n,m \in \mathbb{Z}.$

7.58. $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{6}+2(k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.59. $2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.60. $-\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi < x < -\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.61. $x = \dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

7.62. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi < x < \dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.63. $\operatorname{arctg} 5+2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ x \ne \dfrac{\pi}{2}+2n\pi;\ k,n \in \mathbb{Z}.$

7.64. $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \le x < \dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ \dfrac{\pi}{2}+2n\pi < x \le \dfrac{5\pi}{6}+2n\pi,\ \ k,n \in \mathbb{Z},$

$-\dfrac{11\pi}{6} \le x < -\dfrac{3\pi}{2},\ -\dfrac{3\pi}{2} < x \le -4,\ x = -\dfrac{7\pi}{6}.$

7.65. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}(1-\dfrac{\sqrt{35}}{6})\right) < x < \sin\left(\dfrac{\pi}{4}(1-\dfrac{\sqrt{35}}{6})\right).$

7.66. 2.

7.67. 1.

7.68. $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$

7.69. $x = -\dfrac{21\pi}{16},\ x = -\dfrac{11\pi}{8}.$

7.70. $x = \dfrac{19\pi}{6}.$

8.1. $x = -\dfrac{57}{2},\ y = 17.$

8.2. $x = 3,\ y = 1;\ x = \dfrac{5}{3},\ y = \dfrac{11}{3}.$

8.3. $x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{9}{2};\ x = \dfrac{3}{2},\ y = \dfrac{9}{2}.$

8.4. $x = \dfrac{5}{2},\ y = -\dfrac{5}{2}.$

8.5. $x = 5,\ y = -2.$

8.6. $x = -3,\ y = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

8.7. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ y = \sqrt{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

8.8. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ y = \frac{1}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$

8.9. $x = 3,\ y = -9.$

8.10. $x = \log_2 3,\ y = \log_3 2.$

8.11. $x = -2,\ y = 0.$

8.12. $x = 2,\ y = 6;\ x = \frac{1}{2},\ y = 10.$

8.13. $x = \pi n,\ y = \frac{\pi}{4} - \pi n;\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ y = -\pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}.$

8.14. $x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{12} + \pi n,\ y = \frac{\pi}{8} \mp \frac{\pi}{12} - \pi n;\ n \in \mathbb{Z}.$

8.15. $x = 1,\ y = -\frac{3}{2};\ x = -2,\ y = 3.$

8.16. $x = 1,\ y = \log_3 2.$

8.17. $x = 4,\ y = 4.$

8.18. $x = -2,\ y = -2;\ x = -2,\ y = 2.$

8.19. $x = \frac{1}{3},\ y = 1.$

8.20. $x = 81,\ y = 0.$

8.21. $x = 4,\ y = 1;\ x = -\frac{2}{3},\ y = \frac{10}{3}.$

8.22. $x = 1,\ y = 2;\ x = 1,\ x = \frac{44}{25},\ y = -\frac{28}{5},\ z = -\frac{108}{25}.$

8.23. $x = 2,\ y = 3;\ x = \frac{33}{8},\ y = -\frac{27}{8}.$

8.24. $x = 2,\ y = 1;\ x = -1,\ y = \frac{23}{2}.$

8.25. $x = 1 - \log_2 3,\ y = \frac{1}{6}.$

8.26. $x = 0,\ y = -3.$

8.27. $x = \sqrt[3]{3},\ y = 4.$

8.28. $x = 1,\ y = 3.$

8.29. $x = 10,\ y = 15;\ x = 15,\ y = 10.$

8.30. $x = 1,\ y = 1.$

8.31. $x = 1,\ y = 5.$

8.32. $x = 4,\ y = 2;\quad x = 4/3,\ y = -2/3.$

8.33. $x = 0,\ y = -7/2;\quad x = y = 21.$

8.34. $x = 1/2,\ y = 3/2.$

8.35. $x = 32,\ y = 2.$

8.36. $x = -1,\ y = \frac{1}{\sqrt{3}};\ x = \frac{3}{2},\ y = 9.$

8.37. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad y = \frac{\pi}{2} + \pi k;\quad n, k \in \mathbb{Z}.$

8.38. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}.$

8.39. $x = \frac{\pi}{12},\ y = \frac{11\pi}{12}.$

8.40. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ y = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k;\quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi l;\ n, m, k, l \in \mathbb{Z}.$

8.41. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n + \frac{\pi}{2}k,\quad y = -\frac{\pi}{4} + \pi n - \frac{\pi}{2}k,\quad n, k \in \mathbb{Z}.$

8.42. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ y = -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi k}{5};\ n, k \in \mathbb{Z}.$

8.43. $x = \arccos\frac{27}{28} + 2\pi k, y = \pi + \arcsin\frac{17}{28} + 2\pi n;\quad x = -\arccos\frac{27}{28} + 2\pi k,$

$y = -\arcsin\frac{17}{28} + 2\pi n,\quad k, n \in \mathbb{Z}.$

8.44. $x = 10, y = 15, z = 6.$

8.45. $x = -1, y = 1.$

8.46. $x = 1, y = 5; x = \frac{5}{2}, y = 2.$

8.47. $x = 2, y = -1; x = \frac{12}{7}, y = -\frac{1}{7}.$

8.48. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{9}{4}; x = 2, y \in \mathbb{R}.$

8.49. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$

8.50. $x = \sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}; x = -\sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}.$

8.51. $x = 9, y = 1.$

8.52. $x = \log_2(\sqrt{6} - 2), y = \log_3\frac{\sqrt{6} - 2}{2}.$

8.53. $x = 3, y = \frac{1}{9}.$

8.54. $x = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}, y = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}.$

8.55. $x = \frac{1}{2\log_2 3 - 1}, y = \frac{2}{2\log_2 3 - 1}.$

8.56. $x = 1, y = 3.$

8.57. $x = 2, y = -3; x \in \mathbb{R}, y = 1.$

8.58. $x = \frac{12}{7}, y = \frac{12}{5}, z = -12.$

8.59. $x = 3, y = 3, z = 3.$

8.60. $x = 4, y = -3, z = 0;\quad x = 2, y = -1, z = 2.$

9.1. $\frac{61\sqrt{3}}{4}.$

9.2. $3\sqrt{30}.$

9.3. $\sqrt{7}.$

9.4. 202,8.

9.5. 2 : 5.

9.6. $\sqrt{\frac{2}{4 - \pi}}.$

9.7. $\sqrt{15 + 6\sqrt{3}}.$

9.8. $\frac{147}{8}.$

9.9. $\frac{\pi}{6}.$

9.10. $\sqrt{3} + 1.$

9.11. $\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}.$

9.12. $\frac{\pi + 3}{6\pi}.$

9.13. $10r^2(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}).$

9.14. 6.

9.15. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

9.16. 11.

9.17. 18 : 7.

9.18. 5, 20.

9.19. $R\sin 2\alpha.$

9.20. $\frac{4\sqrt{6}}{5}.$

9.21. $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{5}{13}$, $\arcsin\frac{12}{13}.$

9.22. $\frac{228}{25}.$

9.23. $\frac{32}{5}$.

9.24. $9:20$.

9.25. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

9.26. $\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2\cos(\pi/8)}, R$.

9.27. $\frac{a^2 \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$.

9.28. $\frac{c\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}$.

9.29. $R\cdot\sin 2\alpha\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

9.30. 6.

9.31. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

9.32. $\frac{91}{6+\sqrt{6}}$.

9.33. 1.

9.34. 4.

9.35. $6-2\sqrt{6}$.

9.36. $\frac{5\sqrt{21}}{7}$.

9.37. $\frac{25\sqrt{15}}{64}$.

9.38. $\frac{(p-a)^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

9.39. $\frac{25}{8}$.

9.40. 16.

9.41. $\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$.

9.42. $\frac{16}{5}$.

9.43. $2\sqrt{6}$.

9.44. $\frac{\sqrt{(4b^2-a^2)(a^2-b^2)}}{4}$.

9.45. $\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{3\sin(\beta+\gamma)}$.

9.46. $\arccos\frac{4}{5}$.

9.47. 90°, 10°, 80°.

9.48. $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}, \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}, \frac{2mn}{\sqrt{4m^2-}}$

9.49. $\frac{9}{2}$.

9.50. $\pi\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}$.

9.51. $\frac{l}{\cos\alpha}$.

9.52. $\frac{c\sqrt{2b^2+bc}}{b}$.

9.53. 9,48,4 и $4\sqrt{10}$.

9.54. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$,

$$h_c=\frac{2S}{c},\quad m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},\quad l_c=\sqrt{ab(1-\frac{c^2}{(a+b)^2})},$$

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},\quad R=\frac{abc}{4S}.$$

9.55. $\frac{a+b-c}{2}$.

9.56. $S=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$, где $m=\frac{m_a+m_b+m_c}{2}$.

9.57. $S=\left(4\sqrt{H(H-h_a^{-1})(H-h_b^{-1})(H-h_c^{-1})}\right)^{-1}$, где $H=\dfrac{h_a^{-1}+h_b^{-1}+h_c^{-1}}{2}$.

9.58. $\dfrac{b+c}{a}$.

9.59. $\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$.

9.60. $d_1^2=2(a^2+b^2)-d_2^2$, если $a-b<d_2<a+b$ (иначе параллелограмма нет).

9.61. а) $4\sqrt{26}$, б) такого треугольника нет, в) $\dfrac{7}{2}$.

9.62. 30°, 75°, 75° или 150°, 15°, 15°.

9.63. $\arcsin\dfrac{3}{5}$ или $\pi-\arcsin\dfrac{3}{5}$.

9.64. $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$, $\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$, $\pi-\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$

или $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$, $\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$, $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$.

9.65. нет, т.к. $\arcsin\dfrac{\pi}{4}>\dfrac{\pi}{4}>\dfrac{5\pi}{21}$, откуда $\dfrac{7\pi}{21}+\dfrac{9\pi}{21}+\arcsin\dfrac{\pi}{4}>\pi$.

10.1. $\dfrac{\pi HR^2}{12}$.

10.2. $\dfrac{27(4-\pi)}{4}$.

10.3. $48\pi\sqrt{11}$.

10.4. $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

10.5. $\sqrt[3]{8V\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big/\sqrt{3(2\cos\alpha-1)}}$.

10.6. 6.

10.7. $\dfrac{a}{\left(4\sin\dfrac{\varphi}{2}\sqrt{1-\dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}\right)}$.

10.8. $\arccos\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}}$.

10.9. $\dfrac{\sqrt{31}}{6}$.

10.10. 216.

10.11. $\dfrac{21\sqrt{15}}{10}$.

10.12. $\dfrac{27}{16}$.

10.13. $\dfrac{91}{25}$.

10.14. $\dfrac{7}{2}$.

10.15. 6.

10.16. $\dfrac{\sqrt{6}(5-\sqrt{15})}{10}$.

10.17. $\dfrac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\varphi}$.

10.18. $\dfrac{4\sqrt{5}ad-8\sqrt{2}d^2}{5}$.

10.19. $\dfrac{2H^3}{3}\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1\right)$.

10.20. $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}$.

10.21. $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

10.22. $\dfrac{12}{13+\sqrt{41}}$.

10.23. $\left(\dfrac{180}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\pi}\right)^{\circ}$.

10.24. $\dfrac{\sqrt{2}R}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

10.25. $12\pi r^3$.

10.26. $\left(1+\sqrt{33}\right):8$.

10.27. $\frac{5\pi}{12}$.

10.28. $\frac{125\sqrt{6}}{4}$.

10.29. $28\sqrt{3}$.

10.30. $\arccos\left(\frac{9}{\sqrt{150\pm 24\sqrt{3}}}\right)$.

10.31. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

10.32. $\frac{n}{n+m}\cdot\frac{V}{d}$.

10.33. $\frac{5V}{18}$.

10.34. 24.

10.35. $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.

10.36. 8.

10.37. 20.

10.38. $\arccos\left(46/\sqrt{2641}\right)$.

10.39. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

10.40. $1024/9,\ 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{34}/4\right)$.

10.41. $\frac{3\sqrt{41}}{2}$.

10.42. $9:95$.

10.43. $7:20$.

10.44. $\pi/3$.

10.45. 2.

10.46. $\frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{15}}$.

10.47. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10.48. 90°.

10.49. β.

10.50. $\sqrt{b^2-a^2}$.

10.51. $\arccos\frac{b}{a\sqrt{3}}$.

10.52. $d\sin\alpha$.

10.53. $a\operatorname{ctg}\alpha$.

10.54. α.

10.55. $\sqrt{61}$.

10.56. 512.

10.57. 2 или 1.

10.58. $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$.

10.59. 90°.

10.60. Все: от 0° до 180° (не включительно).

11.2. Неверно.

11.19. Это — серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этих точках.

11.20. Если данные прямые параллельны, то это — прямая, параллельная им и проходящая между ними на равном расстоянии от них; если же данные прямые пересекаются, образуя две пары вертикальных углов, то это — две прямые, служащие биссектрисами этих углов.

11.21. Это — четыре точки: одна из них есть центр окружности, вписанной в треугольник, образованный данными прямыми, а остальные — центры вневписанных окружностей.

11.22. 1. Если $\alpha = 0$, то это — два луча прямой AB;

2. Если $\alpha = \pi$, то это — интервал AB;

3. Если $0 < \alpha < \pi$, то это — две дуги AB, симметричные относительно прямой AB, каждая — мерой $2\pi - 2\alpha$.

11.23. Это плоскость, проходящая через середину одного из отрезков AM параллельно данной плоскости.

11.24. Это плоскость, проходящая через середину одного из указанных отрезков параллельно данным прямым.

11.25. Это — сфера (с выколотыми точками A и B), построенная на отрезке AB, как на диаметре.

12.1. $a = 0, x \in \varnothing; a \neq 0, x = \dfrac{1}{a}$.

12.2. $a = 0, x \in \mathbb{R}; a > 0, x < \dfrac{1}{a}; a < 0, x > \dfrac{1}{a}$.

12.3. $a = 1,\ x \in \mathbb{R};\ \ a = -1,\ x \in \varnothing;\ \ a \neq \pm 1,\ x = \dfrac{1}{a+1}$.

12.4. $a = 1, x \in \varnothing; a \neq 1, x = a$.

12.5. $a = 1,\ x = -1;\ \ a = -1,\ x = 1;\ \ a \neq \pm 1,\ x = \pm 1$.

12.6. $a = \pm 1,\ x \in \varnothing;\ \ a \neq \pm 1,\ x = 1$.

12.7. $a = 0,\ x \neq 0;\ \ a = 1,\ x \in \varnothing;\ \ a \neq 0, 1,\ x = 1$.

12.8. $a < 0,\ x \in \varnothing;\ \ a \geq 0,\ x = \pm\sqrt{a}$.

12.9. $a < 0, x \in \mathbb{R};\ \ a \geq 0,\ x > \sqrt{a},\ x < -\sqrt{a}$.

12.10. $a \leq 0,\ x \in \varnothing;\ \ a > 0,\ -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$.

12.11. $a < 0,\ x \in \varnothing;\ \ a \geq 0,\ x = \pm a$.

12.12. $x = |a|$.

12.13. $a \leq 0,\ x \in \varnothing;\ \ a > 0,\ -a < x < a$.

12.14. $a < 0,\ x \in \mathbb{R};\ \ a \geq 0,\ \left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a \end{array}\right.$.

12.15. $a < 0, x \in \varnothing; a \geq 0, x = a^2$.

12.16. $a = 0,\ x \geq 0;\ \ a \neq 0,\ x = 0$.

12.17. $a < 0,\ x \geq 0;\ \ a \geq 0,\ x > a^2$.

12.18. $a \leq 0,\ x \in \varnothing;\ \ a > 0,\ 0 \leq x < a^2$.

12.19. $a \leq 0,\ x \in \varnothing;\ \ a > 0,\ x < \log_2 a$.

12.20. $a \leq 0,\ x \in \mathbb{R};\ \ a > 0,\ x > \log_2 a$.

12.21. $a \leq 0,\ x \in \varnothing;\ \ 0 < a \neq 1,\ x = 0;\ \ a = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

12.22. $a > 1,\ 0 < x < a;\ \ 0 < a < 1,\ x > a;\ \ a \leq 0,\ a = 1,\ x \in \varnothing$.

12.23. $a \leq 0,\ x \in \varnothing;\ \ a = 1,\ 0 < x \neq 1;$

$0 < a < 1,\ x > 1;\ \ a > 1,\ 0 < x < 1$.

12.24. $|a| > 1, x \in \varnothing; |a| \leq 1, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

12.25. $a = \pm 1, x = a\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ a \neq \pm 1, x \in \varnothing$.

12.26. $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ оба множителя чётные и один из них делится на 3.

12.27. $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$.

12.28. $2^{10} + 5^{12} = \left(2^5 + 5^6\right)^2 - \left(2^3 \cdot 5^3\right)^2$.

12.29. $222^{333} + 333^{222} = (222^{111})^3 + (333^{74})^3$.

12.30. $\dfrac{2010^{2010} - 1}{2010 - 1} = 1 + 2010 + 2010^2 + \ldots + 2010^{2009}$.

12.31. Нет: например, $n = 333$.

12.32. 34452, 34056, 34956.

12.33. $n^2 + n = n(n+1)$ — один из множителей чётный.

12.34. Рассмотреть остатки от деления числа n на 3: $n = 3k + r, r = 0, 1, 2 (r = -1, 0, 1)$.

12.35. $n^3 + 5n = 6n + (n-1)n(n+1)$.

12.36. $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$.

12.37. Каждое число, начиная с третьего, имеет вид: $n = 100k + 11 = 4(25k+2) + 3$.

12.38. $\overbrace{111\ldots1}^{n}\overbrace{555\ldots5}^{n-1}6 = (\overbrace{333\ldots3}^{n-1}4)^2$.

12.39. 18, 216.

12.40. Любой общий делитель этих чисел является делителем числа $5(3n+5) - 3(5n+8) = 1$.

12.41. $n^2 + 10n + 21 = (n+3)(n+7)$,

$n^2 + 9n + 18 = (n+3)(n+6)$, $n+6$ и $n+7$ — взаимно простые.

12.42. $n^2 + 6n + 9 = (n+3)^2$, $n+3$ и $n+4$ — взаимно простые.

12.43. $n^2 + 5n + 16 = (n+9)(n-4) + 13 \cdot 4$, $(n+9) - (n-4) = 13$.

12.44. $\frac{53}{450}$.

12.47. $x = 4n - 1$, $y = 3n - 1, n \in \mathbb{Z}$.

12.48. Рассмотреть остатки от деления левой и правой части на 3.

12.49. $(x+1)(y+1) = 1$.

13.1. 3

13.2. 69 000 рублей.

13.3. 104 500 рублей.

13.4. 90 кг.

13.5. 3.

13.6. 300 000 рублей.

13.7. 1 500 000 рублей.

13.8. 917 600 рублей.

13.9. 9.

13.10. 25 000 рублей.

13.11. 60 кг.

13.12. 100 кг.

13.13. 2700.

13.14. 56 000 рублей.

13.15. 2007.

14.1. $a \neq \pm 1$.

14.2. $a \neq 0$.

14.3. $a = -2$.

14.4. $a = -1$.

14.5. $a \neq \pm 1$.

14.6. $a \neq 2, a \neq 4, a \neq 8$ $x = -\frac{8}{(a-4)(a-8)}, y = \frac{2(a-6)}{a-8}$;

$a = 2$ $x \in \mathbb{R}, y = x + 2$; $a = 4, a = 8$ решений нет.

14.7. $a < 6$.

14.8. $a = 2$.

14.9. $a \neq 1$.

14.10. $a = 3$.

14.11. $2 < a < 4$.

14.12. $a = 13$.

14.13. $-2 - 2\sqrt{2} < a < 0; 0 < a < -2 + 2\sqrt{2}$.

14.14. $a = -2, a = 1$.

14.15. $a = -4.$
14.16. $a = \frac{1}{17}.$
14.17. $a = 2.$
14.18. $a < 0\ \ x = \log_2 a^2;\ a > 0\ \ x = \log_2 a^2, x = \log_2 a;\ a = 0$ — решений нет.
14.19. $a < -2, a > 2.$
14.20. $7 < a \neq 7,5.$
14.21. $-4 < a \neq -1\ \ x = 3 - \sqrt{a+5}$; при остальных a корней нет.
14.22. $a < 0\ \ x > \frac{4a^2 + a}{2};\ a \geq 0\ \ x > \frac{a^2 + 9a}{2}.$
14.23. $3 - 2\sqrt{5} < a < \sqrt{10} - 2.$
14.24. $x = -\frac{1}{4}, y = \frac{5}{4}.$
14.25. $a < -3, a = -1, a \geq 3.$
14.26. $|a| > 1, x = 1; a = -1,\ -3 \leq x \leq 1;\ |a| < 1,\ x = 1,\ x = \frac{a+7}{a-1};\ a = 1,\ x \geq 1.$
14.27. $\frac{4}{3} \leq a \leq 2.$
14.28. $1 \leq a \leq 3, a = 4.$
14.29. $a \neq 3.$
14.30. $-1 \leq a < 0.$
14.31. $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{2}{3}.$
14.32. $a = c = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}; a = 0, b = c = \frac{1}{2}.$
14.33. $c < 0.$
14.34. $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}.$
14.35. $0 \leq a \leq 1.$
14.36. $0 < a < 1, 1 < a \leq 3, x = -a - 3; a > 3, x = a, x = -a - 3$; при остальных a решений нет.
14.37. $a = 0,\ 2 + \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{5}.$
14.38. $6\frac{a + b - 3ab}{a + b + ab}$ при $a \neq 0$; 6 при $a = 0$.
14.39. $\frac{15}{2} < a < 8, a > 12.$
14.40. $-\frac{3}{2} \leq a < -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} < a < 0.$
14.41. $a \leq -\frac{5\sqrt{5}}{4}, a \geq \frac{5\sqrt{5}}{4}.$
14.42. при $a < 1$ и $a > \sqrt{2}$ решений нет; при $a = 1$ и $a = \sqrt{2}$ — четыре решения; при $1 < a < \sqrt{2}$ — восемь решений.
14.43. $a = -\frac{57}{32}, x = -\frac{5}{8}.$
14.44. $a = \pm\sqrt{2}, a = \pm\frac{\sqrt{15} + 1}{4}.$
14.45. $-3 \leq a \leq 1.$
14.46. $-5 < a < -\sqrt{24}, -\sqrt{24} < a < -3.$
14.47. $-\frac{12}{5} \leq a \leq 0.$
14.48. а) $-\sqrt{26} - 1 \leq a \leq \sqrt{26} - 1$; б) $-\sqrt{26} + 1 \leq a \leq \sqrt{26} - 1.$
14.49. $-1 \leq a < 2.$
14.50. $a = -\frac{1}{3},\ a = 2.$
14.51. $a = -\frac{17}{48}.$
14.52. $a = -1,\ 1 < a < 3,\ 4 < a \leq 6.$

14.53. $-8 < a < 0$.

14.54. $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}, 0 < a < \sqrt{2}$.

14.55. $n = 33$.

15.1. 3.

15.2. 83.

15.3. 49, 83.

15.4. 24.

15.5. 832.

15.6. 27.

15.7. $2, 2, 2$.

15.8. $m = 2$, $n = 117$; $m = 3$, $n = 5$

15.9. 1) И; 2) Р.

15.10. $x = -7, y = 7; x = -6, y = 6$.

15.11. $x = y = 0; x = \pm 3, y = 5; x = \pm 24, y = 20$.

15.12. $x = 6, y = \pm 1, z = 0; x = 0, y = \pm 1, z = 0$.

15.13. $x = 15n^2 - 6n, y = 3n - 1; n \in \mathbb{Z}$.

15.14. 189.

15.15. 764.

15.16. 300.

15.17. 648.

15.18. 160.

15.19. $a = 4, 5, \ldots,\ b = -2;\ a = 3, 4, \ldots,\ b = -1$.

15.20. $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1, \sqrt{2} < a < 2$.

15.21. $a = -4, -\frac{5}{2} \le a \le -\frac{9}{4}$.

15.22. $x = -1, x = 3$.

15.23. $x = y = 0; x = y = 2; x = 0, y = 3; x = 3, y = 0$.

15.24. $x = 1, y = 6; x = 1, y = 7; x = 2, y = 7$.

15.25. $x = 11$, $y = -9$.

15.26. $a = -2$, $a = 0$.

15.27. $a = 1$, $a = \frac{5}{2}$.

15.28. 40, 30.

15.29. $1750m$.

15.30. 94.

15.31. 8.

15.32. 24, 7.

15.33. 70.

15.34. 132.

15.35. $x = -2, y = 0; x = 0, y = -2; x = -3, y = 0; x = -1, y = 2$.

15.36. $x = 2, y = \pm 3; x = -2, y = \pm 3$.

15.37. $x = -31$, $x = -7$.

15.38. $x = \pm 1, y = \mp 1, z = -1$.

15.39. $\frac{5}{11} < a \le \frac{6}{13}$.

15.40. $x = (4n - 3)^2, n = 1, 2, \ldots$

15.41. $(2\sqrt{2}, -4, -4); (2\sqrt{2}, -2, 2)$.

15.42. $x = y = 0$.

15.43. нет.

15.44. 6,25.

15.45. 144.

15.46. $375, 125$.

15.47. 12 месяцев.

15.48. 11.

15.49. 33.

15.50. один 16-квартирный и одиннадцать 12-квартирных.

15.51. 20.

15.52. $x = -2$.

15.53. 11 гвоздик и 7 роз.

15.54. $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

15.55. 642.

15.56. $n = 5$.

15.57. $\frac{11111111}{111111111}$.

15.58. 1960.

15.59. 7200.

15.60. 132.

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 1

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z ,

Регион

Код предмета

Название предмета

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение номеров вариантов в задании
и бланке регистрации подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Номер варианта

ВНИМАНИЕ! ***Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета***

Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

1
2
3
4
5

6
7
8
9
10

11
12
13
14
15

16
17
18
19
20

21
22
23
24
25

26
27
28
29
30

31
32
33
34
35

36
37
38
39
40

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 2

Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта

Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета***

При недостатке места для ответа используйте оборотную сторону бланка

Справочное издание

Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К., Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И., Рязановский А. Р., Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Хачатурян А. В., Шестаков С. А., Шноль Д. Э.

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16678 от 20.05.2015 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Л. К. Корнилова, Н. Н. Яковлева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова, М. В. Демина*

107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «Красногорская типография».
143405, Московская область, г. Красногорск, Коммунальный кв., д. 2.
www.ktprint.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.: 8 (495) 641-00-30 (многоканальный).