ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ-2016

Тематический тренинг

10-11 классы

ЛЕГИОН

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ-2016

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНИНГ

10–11 классы

Учебно-методическое пособие

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2015

ББК 22.1
М 34

Рецензенты: *О. Б. Кожевников* — кандидат физико-математических наук, доцент;
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель РФ.

Авторский коллектив:
Иванов С. О., Коннова Е. Г., Кривенко В. М., Нужа Г. Л., Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Фридман Е. М., Ханин Д. И.

М 34 **Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10–11 классы**: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 400 с. — (ЕГЭ.)

ISBN 978-5-9966-0769-3

Начиная с 2015 года ЕГЭ по математике разделён на 2 уровня: базовый и профильный. Данное пособие предназначено для фундаментальной подготовки к Единому государственному экзамену по математике **на обоих уровнях**. Книга будет полезна учащимся выпускных классов, учителям, а также тем, кто собирается сдавать ЕГЭ после перерыва в обучении.

Книга состоит из 26 параграфов, каждый из которых посвящён одной из тем экзаменационной работы. В большинстве случаев отдельный параграф имеет следующую структуру:

- **краткие теоретические сведения**, необходимые для успешного выполнения заданий;
- **набор заданий, аналогичных встречавшимся в экзаменационных работах.** За каждым заданием, снабжённым решением, даётся несколько примеров для самостоятельного выполнения;
- **задания для контроля**: 4 варианта по 5 заданий в каждом.

Все задания снабжены ответами, прилагаемыми в конце пособия.

Издание является частью комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемого издательством «Легион».

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0769-3

Оглавление

2. Зак. № 21

От авторов

Начиная с 2015 года ЕГЭ по математике разделён на 2 уровня: базовый и профильный. Данное пособие предназначено для фундаментальной подготовки к Единому государственному экзамену по математике **на обоих уровнях**. Книга будет полезна учащимся выпускных классов, учителям, а также тем, кто собирается сдавать ЕГЭ после перерыва в обучении.

Книга состоит из 26 параграфов, каждый из которых посвящён одной из тем экзаменационной работы. Параграфы, в которых рассматриваются задания с кратким ответом, содержат:

- **краткие теоретические сведения**, необходимые для успешного выполнения заданий.
- **набор заданий, аналогичных встречавшимся в экзаменационных работах.** За каждым заданием, снабжённым решением, даётся несколько примеров для самостоятельного выполнения.
- **задания для контроля**: 4 варианта по 5 заданий в каждом.

Параграфы, в которых рассматриваются задания с развёрнутым ответом, имеют более простую структуру: там отсутствуют теоретические сведения и задания для контроля. Необходимую для работы с этими параграфами теорию можно повторить, используя один из справочников (карманный или большой), выпускаемых отдельно (см. ниже описание комплекса).

Все предложенные в книге задания снабжены ответами, прилагаемыми в конце пособия.

В книге используются следующие условные обозначения:

$\boxed{20.}$ — к заданиям с номерами, обведёнными рамкой, в конце книги приводится подробное решение с пояснениями;

Полосой слева от текста отмечается теоретический материал, необходимый для решения последующих заданий.

Пособие является частью комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемого издательством «Легион».

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»: основные пособия

Пособие	Задания по темам	Варианты ЕГЭ	Теория	Решения	Уровень сложности*
Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10–11 классы	+++		++	+	БПВ
Математика. Подготовка к профильному уровню ЕГЭ-2016		+++	++	+	БПВ
Математика. Подготовка к базовому уровню ЕГЭ-2016		+++	++		БПВ
Решебник. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016				+++	БПВ
Математика. 10-11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия	+++				Б
Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тренажёр по тригонометрии (задание с развёрнутым ответом)	+++				П
Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тренажёр по неравенствам (задание с развёрнутым ответом)	+++				П
Математика. Профильный уровень ЕГЭ-2016. Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы	+++			+	П
Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Учимся выполнять задания с развёрнутым ответом	++		++	++	ПВ
Математика. 7-11 классы. Карманный справочник			++		
Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ	+		++	++	БПВ

*Б — базовый, П — повышенный, В — высокий уровень сложности

Комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10—11 классы *Настоящая книга.*
- Математика. Подготовка к профильному уровню ЕГЭ-2016. *Пособие содержит 40 тренировочных вариантов ЕГЭ, решения к избранным вариантам, а также теоретический справочник.*
- Математика. Решебник. Подготовка к профильному уровню ЕГЭ-2016. *Пособие содержит решения всех вариантов тестовых заданий книги «Математика. Подготовка к профильному уровню ЕГЭ-2016».*
- Математика. Подготовка к базовому уровню ЕГЭ-2016. *Сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ЕГЭ по математике на базовом уровне, дополненный теоретическим справочником.*
- Математика. 10—11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия. *Тренажёр для подготовки к решению заданий ЕГЭ с кратким ответом.*
- Математика. 7—11 классы. Карманный справочник. *Пособие содержит необходимый справочный материал для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике, а также к различным формам промежуточного контроля по алгебре и геометрии в 7—11 классах.*
- Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ. *Пособие содержит теоретический материал, подкреплённый примерами его использования при решении заданий ЕГЭ.*
- Математика. Профильный уровень ЕГЭ-2016. Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы. *Пособие содержит задания по уравнениям и неравенствам, традиционно включаемым в число заданий ЕГЭ с развёрнутым ответом.*
- Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тренажёр по тригонометрии (задание с развёрнутым ответом). *Предлагаемое пособие содержит около 300 задач по тригонометрии, предназначенных для подготовки к выполнению первого из заданий ЕГЭ с развёрнутым ответом.*

- Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тренажёр по неравенствам (задание с развёрнутым ответом. *Предлагаемое пособие содержит большое количество заданий по решению неравенств, предназначенных для подготовки к выполнению соответствующего задания ЕГЭ с развёрнутым ответом.*
- Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Учимся выполнять задания с развёрнутым ответом. *Самоучитель и задачник для подготовки к решению неравенств, экономически-ориентированных задач, заданий с параметром, исследовательских задач, предлагаемых на ЕГЭ.*

Дополнением к комплексу послужат следующие пособия:

- Математика. 11-й класс. Повторение материала средней школы и подготовка к итоговой аттестации. Интенсивный курс для учителей и обучающихся.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Теория вероятностей.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решение задач по стереометрии методом координат (задание С2).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: секреты оценки заданий повышенного и высокого уровней сложности. Решения и комментарии.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней (типовые задания С1).
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание 16. Многогранники: типы задач и методы их решений.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание 17. Решение неравенств с одной переменной.
- Математика. Подготовка к ЕГЭ: решение планиметрических задач (С4).

Методика работы с основными пособиями комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Подготовку к ЕГЭ следует начинать с пособий «Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10—11 классы» и «Математика. 10—11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия». Оба этих пособия могут использоваться в течение двух учебных лет (10 и 11 классы), а способ организации процесса обучения зависит от преподавателя. Например, используя тренажёр, учащиеся могут выполнить на уроке большое число заданий базового уровня сложности по определённой теме или по различным темам. Книгу «Математика. ЕГЭ-2016. Тематический тренинг. 10—11 классы» можно использовать для ознакомления с методами решения задач базового, повышенного и высокого уровня сложности, для организации диагностики и контроля (самоконтроля). Её использование целесообразно не только на уроках, но и при самоподготовке.

Сборник тестов «Математика. Подготовка к профильному уровню ЕГЭ-2016» следует использовать после освоения большей части материала из рассмотренных выше пособий. Предлагаемые в нём тренировочные варианты в формате профильного уровня ЕГЭ могут использоваться по принципу разбора варианта в классе и оставления парного варианта школьникам в качестве домашней работы, а могут — и для проведения репетиции экзамена или для организации диагностики и контроля.

К указанному сборнику тестов отдельно предлагается решебник с подробными пояснениями, который может использоваться как преподавателем — для разбора решений заданий повышенного и высокого уровней сложности, так и учащимся при самостоятельной подготовке.

Для подготовки к сдаче базового уровня ЕГЭ следует использовать книгу «Математика. Подготовка к базовому уровню ЕГЭ-2016». Методика работы с этим сборником тестов та же, что и с рассмотренным ранее сборником тестов для профильного уровня ЕГЭ.

Пособия «Математика. 7—11 классы. Карманный справочник» и «Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ» удобно использовать для получения необходимого теоретического материала в период подготовки к ЕГЭ. Большой справочник можно, кроме того, использовать для организации повторения теории: по прилагаемым там примерам заданий можно определить важность запоминания тех или иных формул и теорем для успешной сдачи экзамена.

Следующие пособия предназначены для подготовки к заданиям с развёрнутым ответом. Начинать здесь следует с двух тренажёров: «Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тренажёр по тригонометрии (задание с развёрнутым ответом)» и «Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тренажёр по неравенствам (задание с развёрнутым ответом». Оба этих тренажёра построены по принципу от простого — к сложному, и их следует использовать не только для тренировки и контроля, но и при изучении соответствующих тем. Например, тренажёр по тригонометрии можно использовать в качестве тренировочной тетради на уроках алгебры (математики), посвящённых изучению тригонометрии.

Книгу «Математика. Профильный уровень ЕГЭ-2016. Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы» рекомендуется использовать совместно с тренажёрами для диагностических и контрольных работ либо при выдаче учащимся заданий на дом.

К пособию «Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Учимся выполнять задания с развёрнутым ответом» следует переходить при работе с наиболее подготовленными учащимися, претендующими на высокий балл ЕГЭ. Рассмотренные в нём темы можно как отдавать на самостоятельное изучение отдельным школьникам, так и применять в классах/школах с углублённым изучением математики.

Обсудить пособия, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальных форумах издательства
`http://f.legionr.ru`,
`http://legion-posobiya.livejournal.com`.

Следите за бесплатными дополнениями и методическими рекомендациями на сайте издательства `http://legionr.ru` в связи с возможными изменениями спецификаций экзаменационных работ, разрабатываемых ФИПИ.

Замечания и пожелания можно направлять по адресу: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550 или на e-mail: legionrus@legionrus.com.

Глава I. Задания базового уровня сложности

§ 1. Простые текстовые задачи

1.1. Задачи с целочисленным ответом

В ответе на эти задачи надо писать целое число (количество автобусов, число банок с краской, число пачек сахара и т.д.). Нужно самому подумать, в бо́льшую или меньшую сторону округлять результат вычислений.

- *Пример 1.*
  Если для перевозки детей нужно 5,3 автобуса, то округлять будем в бо́льшую сторону (6 автобусов). Иначе автобусов просто не хватит.

- *Пример 2.*
  Если денег хватает на 12,8 пачек сахара, то нам продадут всего 12 пачек и у нас останется сдача.

Иногда в условии может требоваться округление по математическим правилам. Если в округляемом числе цифра десятых (первая цифра, стоящая после запятой) меньше 5, то число округляется в меньшую сторону, то есть все цифры после запятой отбрасываются. Например: $14{,}298 \approx 14$. Если в округляемом числе цифра десятых больше или равна 5, то число округляется в бо́льшую сторону, то есть к числу единиц прибавляется 1. Например: $14{,}51 \approx 15$.

1. На складе 217 бочек с краской и 315 бочек с эмалью. Сколько потребуется машин, чтобы перевезти все бочки со склада в магазин, если в машину помещается не более 85 бочек?

2. Экскурсия по городу была организована для 127 школьников. Найдите, какое количество автобусов вместимостью 33 человека необходимо заказать для проведения этой экскурсии.

3. Теплоход рассчитан на 840 пассажиров и 26 членов команды. Спасательная шлюпка может вместить 72 человека. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

4. В летнем лагере 260 детей и 28 воспитателей. В автобус вмещается не более 50 пассажиров. Сколько автобусов требуется, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

$\boxed{5.}$ Блокнот стоит 6 рублей 40 копеек. Какое наибольшее число блокнотов можно купить на 80 рублей?

6. Сырок стоит 7 рублей 80 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 70 рублей?

7. Порция мороженого «Пломбир» стоит 24 рубля 50 копеек. Какое наибольшее число порций можно купить на 260 рублей?

$\boxed{8.}$ В пачке бумаги 250 листов формата А4. За месяц в школе используется 1200 листов. Какое наименьшее число пачек бумаги нужно купить в школу на 3 месяца?

9. Необходимо распечатать электронную версию книги объёмом 508 страниц в 5 экземплярах. Сколько потребуется пачек бумаги для распечатки, если в каждой пачке 250 листов?

10. Каждый день во время конференции расходуется 60 пакетиков чая. Конференция длится 4 дня. Чай продаётся в пачках по 25 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

$\boxed{11.}$ В магазине проходит рекламная акция: при покупке двух пакетов яблочного сока покупатель получает ещё один пакет сока в подарок. Какое наибольшее число пакетов яблочного сока можно получить на 200 рублей, если цена одного пакета сока составляет 34 рубля?

12. В гипермаркете проходит рекламная акция: покупая 3 шоколадки, 4-ю покупатель получает в подарок. Шоколадка стоит 28 рублей. Какое наибольшее число шоколадок получит покупатель за 300 рублей?

$\boxed{13.}$ Роза стоит 45 рублей. Сергей хочет подарить Свете букет из нечётного количества цветов. Из какого наибольшего числа роз получится составить букет, если у Сергея есть 550 рублей?

14. На день рождения принято дарить букет из нечётного числа цветов. Тюльпаны стоят 30 рублей за штуку. У Вани есть 370 рублей. Из какого

наибольшего числа тюльпанов получится составить букет на день рождения Маши?

15. Для приготовления мармелада на 1 кг слив необходимо 1,4 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить мармелад из 23 кг слив?

16. Для приготовления малинового варенья на 1 кг малины требуется 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 16 кг малины?

17. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 14 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 20 г. Какое наименьшее число пакетиков нужно купить хозяйке для приготовления 23 литров маринада?

18. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 13 г лимонной кислоты. Хозяйка готовит 9 литров маринада. В магазине продаются пакетики лимонной кислоты по 10 г. Какое наименьшее число пакетиков нужно купить хозяйке для приготовления маринада?

19. Полуторалитровая бутылка воды стоит 15 рублей 50 копеек. Какое наибольшее число литров воды можно купить на 200 рублей, если покупать воду только в таких полуторалитровых бутылках?

20. В отделении больницы находятся 25 больных, которым врач назначил уколы лекарства по 2,5 мл. Уколы необходимо делать 3 раза в день. В упаковке 16 ампул лекарства по 2,5 мл. Какое наименьшее количество упаковок нужно заказать на один день?

21. Больному прописано лекарство, которое следует пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 18 дней. Лекарство выпускается в упаковках по 10 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок потребуется на весь курс лечения?

22. Одна таблетка лекарства весит 30 мг и содержит 15% активного вещества. Врач прописывает ребёнку 2,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 15 кг в течение суток?

23. В доме, в котором живёт Пётр Иванович, один подъезд. На каждом этаже по пять квартир. Пётр Иванович живёт в квартире № 44. На каком этаже живет Пётр Иванович?

24. В доме, в котором живёт Саша, один подъезд. На каждом этаже по четыре квартиры. Саша живёт в квартире № 51. На каком этаже живёт Саша?

25. В доме, в котором живёт Петя, 7 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже по 5 квартир. Петя живёт в квартире № 109. В каком подъезде живёт Петя?

26. В доме, в котором живёт Дима, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Дима живёт в квартире № 174. В каком подъезде живёт Дима?

27. В американских автомобилях скорость на спидометре измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 47 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

28. Геннадий купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 76 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

29. Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 84 км в час? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

30. Автобус Москва — Таганрог отправляется в 10:50, а прибывает в 6:50 на следующий день (время московское). Сколько часов автобус находится в пути?

31. Поезд Ростов—Москва отправляется в 13:40, а прибывает в 7:40 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

32. Поезд Волгоград — Москва отправляется в 13:20, а прибывает в 6:20 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

1.2. Денежные расчёты

33. Летом килограмм помидоров стоит 40 рублей. Валентина Львовна купила 3 кг 300 г помидоров. Сколько рублей сдачи она должна получить с 1000 рублей?

34. Лена купила 1 кг 200 г яблок по цене 126 рублей за килограмм. Сколько сдачи она должна получить с 500 рублей? Ответ укажите в рублях.

35. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и залил в бак 32 литра бензина по цене 30 рублей 50 копеек. за литр. Сколько сдачи должен получить клиент? Ответ дайте в рублях.

36. На счету мобильного телефона Максима было 215 рублей, а после разговора с бабушкой осталось 160 рублей. Сколько минут длился разговор с бабушкой, если одна минута разговора стоит 2 рубля 50 копеек?

37. Маша купила месячный проездной билет на троллейбус. Проездной билет стоит 280 рублей, а разовая поездка — 7 рублей. Сколько рублей сэкономила Маша, если за месяц она сделала 48 поездок на троллейбусе?

38. Аня купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 54 поездки. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 700 рублей, а разовая поездка 18 рублей.

39. Больному предложено два расчёта за лечение: оплата 9 разовых процедур по цене 125 рублей за процедуру или оплата всех процедур единовременно в размере 2000 рублей. Какой способ оплаты выгоднее? В ответе укажите, на сколько рублей.

40. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 10 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 346 025 киловатт-часов, а 1 июня показывал 346 308 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за май?

41. В квартире, где проживает Владимир, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 143 $м^3$ воды, а 1 октября — 152 $м^3$. Какую сумму должен заплатить Владимир за холодную воду за сентябрь, если цена 1 $м^3$ холодной воды составляет 20 рублей 30 копеек? Ответ дайте в рублях.

42. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 2 рубля 60 копеек. Счётчик электроэнергии 1 мая показывал 7381 киловатт-час, а 1 июня — 8124 киловатт-часа. Сколько рублей надо заплатить за электроэнергию за май?

1.3. Проценты

43. Платье стоит 2120 рублей. Скидка в день распродажи равна 35%. Сколько стоит платье со скидкой в день распродажи?

44. Футболка стоила 900 рублей. После снижения цены она стала стоить 720 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

45. Стоимость одной поездки в маршрутном такси была повышена на 32% и составила 33 рубля. Сколько рублей стоила одна поездка до повышения цены?

46. Цена на электрический чайник была повышена на 18% и составила 1534 рубля. Сколько рублей стоил товар до повышения цены?

47. Тестовое задание с повышенной степенью сложности выполнили 7 школьников, что составляет 4% от общего числа тестируемых. Найдите, сколько школьников участвовало в тестировании.

48. За квартал завод выпустил 180 000 станков, из них 8% не прошли ОТК (оказались с браком). Среди прошедших ОТК станков 45% были проданы в течение одного квартала. Сколько станков было продано в течение первого квартала?

49. В некотором городе живёт 300 000 жителей. Среди них 20% детей и подростков. Среди взрослых жителей 40% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых жителей работает?

50. Среди 50 000 жителей 40% не интересуются футболом. Среди футбольных болельщиков 70% смотрели по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрели этот матч по телевизору?

$\boxed{\textbf{51.}}$ Билет на междугородный автобус для взрослого стоит 260 рублей. Стоимость билета для ребёнка до 10 лет составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 детей до 10 лет и 2 взрослых. Сколько рублей сто́ят билеты на всю группу?

52. Железнодорожный билет для взрослого стоит 1580 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей сто́ят билеты на всю группу?

$\boxed{\textbf{53.}}$ Блокнот стоил 6 рублей. После переоценки он подорожал на 10%. Сколько таких блокнотов можно купить на 80 рублей после переоценки?

54. Поздравительная открытка стоит 20 рублей. Какое максимальное число открыток можно будет купить на 200 рублей после повышения цены на 25%?

55. В магазине во фруктовом отделе при покупке на сумму свыше 150 рублей скидка 10%. Сколько штук киви можно купить за 200 рублей, если одна штука стоит 8 рублей? (В ответе укажите наибольшее возможное количество).

56. Пирожок в школьном буфете стоит 12 рублей. Какое максимальное число пирожков можно будет купить на 50 рублей после снижения цены пирожка на 25%?

57. Стоимость комплекта учебников по математике составляет 420 руб. Какое максимальное количество комплектов по математике может приобрести библиотека на 5000 руб, если комплект подорожает на 15%?

58. Стоимость 20 мячей до уценки составляла 900 руб. Какое максимальное количество мячей можно приобрести на ту же сумму после их уценки на 10%?

59. Тракторист за день вспахивает 8 га пашни. Сколько дней понадобится трактористу, чтобы вспахать поле площадью 120 га, если его производительность увеличится на 25%?

60. В маршрутном такси 20 посадочных мест. Какое минимальное количество такси потребуется для того, чтобы перевезти 87 учащихся от школы до Дворца спорта, если каждое такси будет заполнено школьниками на 90%?

61. Из 30 центнеров муки 40% было продано оптом, а остальное расфасовано в пакеты по 2 кг. В один ящик вмещается 40 пакетов. Сколько ящиков потребуется, чтобы разместить пакеты с мукой?

62. Анна Владимировна купила в магазине стиральную машину в кредит на год под 12% годовых. Стиральная машина стоит 24 тысячи рублей. Сколько рублей Анна Владимировна должна вносить ежемесячно за машину, если всю сумму кредита вместе с процентами нужно погасить за год, выплачивая ежемесячно одинаковую сумму денег?

63. Клиент взял в банке кредит 100 000 рублей на год под 14% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму вместе с процентами. Сколько рублей должен клиент вносить в банк ежемесячно?

Задания для контроля

Вариант 1

1. На туристический слёт приехали 250 участников и 30 членов жюри. Каждый автобус вмещает не более 42 человек. Какое наименьшее количество автобусов требуется для перевозки всех участников и всех членов жюри?

2. Больному прописаны инъекции лекарства, которые нужно делать по ампуле 0,6 г 2 раза в день в течение 28 дней. В одной упаковке 10 ампул лекарства по 0,6 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

3. Павел купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 50 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

4. В городе 180 000 жителей. Из них 30% дети и подростки. Среди взрослых 45% не работают (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых работает?

5. Налог на доходы и пенсионный налог составляют 14% от заработной платы. После удержания этих налогов менеджер получил 12 900 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата этого менеджера?

Вариант 2

1. Мама для своих двух детей покупает чётное количество воздушных шариков. Какое наибольшее число шариков она сможет купить на 320 рублей, если один шарик стоит 35 рублей?

2. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,2 г 4 раза в день в течение 12 дней. В одной упаковке 8 таблеток лекарства по 0,2 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

3. В магазине килограмм апельсинов стоит 40 рублей. Света купила 1 кг 100 г апельсинов. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

4. Магазин закупает кастрюли по оптовой цене 70 рублей за штуку и продаёт с наценкой 20%. Какое наибольшее число кастрюль можно купить в этом магазине на 1300 рублей?

5. Цена на электродрель была повышена на 18% и составила 2360 рублей. Сколько рублей стоила электродрель до повышения цены?

Вариант 3

1. Шарик стоит 3 рубля 40 копеек. Какое наибольшее число шариков можно купить на 40 рублей?

2. В коробке 110 кусков мела. За месяц в школе расходуется 400 кусков мела. Какое наименьшее количество коробок мела нужно купить в школу на 6 месяцев?

3. В магазин привезли учебники по биологии для 7—9-х классов по 50 штук для каждого класса. В шкафу 4 полки, на каждой полке помещается 30 книг. Сколько шкафов можно полностью заполнить книгами по биологии, если все книги имеют одинаковый формат?

4. Оптовая цена рулона обоев 80 рублей. Розничная цена на 30% выше оптовой. Какое наибольшее число таких рулонов можно купить по розничной цене на 800 рублей?

5. Кириллу нужно 120 000 руб. для поступления в платную аспирантуру. Он взял в банке кредит на год под 12%. Для погашения кредита необходимо ежемесячно вносить в банк одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей Кирилл должен вносить в банк ежемесячно?

Вариант 4

1. На экскурсию поехали 320 школьников и 35 учителей. Каждый автобус вмещает не более 38 человек. Какое наименьшее количество автобусов требуется для перевозки всех школьников и всех учителей?
2. Для приготовления 1 литра компота требуется 70 г сахара. Сахар продаётся в пакетах по 500 г. Какое наименьшее число пакетов нужно купить хозяйке для приготовления 16 литров компота?
3. Павел купил катер, на приборах которого скорость измеряется в узлах. Узел равен 1852 м в час. Какова скорость катера в километрах в час, если его скорость 30 узлов? Ответ округлите до целого числа.
4. Банка кофе стоила 320 рублей. После повышения цены она стала стоить 368 рублей. На сколько процентов была повышена цена на банку кофе?
5. Оптовая цена ножа 160 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких ножей можно купить по розничной цене на 3000 рублей?

§ 2. Соответствие между величинами и их значениями

В заданиях данного типа проверяется умение работать с единицами измерения длины, площади, объёма, массы и т.д., а также умение приблизительно оценивать численные значения различных величин, опираясь на здравый смысл. В тех случаях, когда у учащегося не получается приблизительно оценить численное значение одной из величин (или даже нескольких из них), полезно расставить величины по порядку возрастания рассматриваемого признака. Скажем, если речь идёт о массе, то надо поставить на первое место самый лёгкий из предлагаемых объектов, на второе место — тот объект, который тяжелее первого, но легче остальных, и т.д. Затем следует привести все предлагаемые значения числовых величин к одной единице измерения и тоже расставить их по возрастанию. Тем самым будет установлено требуемое соответствие (самому лёгкому объекту припишется самое маленькое значение числовой величины и т.д.).

Приведём наиболее важные правила перевода единиц измерения.

Единицы длины

1 м = 100 см
1 м = 10 дм
1 м = 1000 мм
1 км = 1000 м
1 дм = 10 см
1 см = 10 мм

Единицы площади

1 м^2 = 10 000 см^2
1 м^2 = 100 дм^2
1 м^2 = 10^6 мм^2
1 км^2 = 10^6 м^2
1 дм^2 = 100 см^2
1 см^2 = 100 мм^2
1 га = 10^4 кв.м
1 а = 100 кв.м

Единицы объёма

1 л = 1 дм^3
1 мл = 1 см^3
1 м^3 = 10^6см^3
1 м^3 = 1000 л
1 м^3 = 10^9 мм^3

$1\ км^3 = 10^9\ м^3$
$1\ л = 1000\ см^3$
$1\ см^3 = 1000\ мм^3$

Единицы массы

1 кг= 1000 г
1 т= 1000 кг
1 г= 1000 мг
1 ц= 100 кг

Единицы времени

1 мин = 60 с
1 ч = 60 мин=3600 с
1 сутки = 24 ч
1 неделя = 7 суток
1 месяц = 28 – 31 суток
1 год = 365 – 366 суток

64. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) толщина учебника	1) 960 км
Б) ширина реки	2) 2 см
В) высота письменного стола	3) 14 м
Г) расстояние между Ростовом-на-Дону и Москвой	4) 80 см

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

65. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) длина кита	1) 1,2 км
Б) длина грузового поезда	2) 3000 см
В) расстояние от истока до устья Волги	3) 200 мм
Г) длина лезвия поварского ножа	4) 3530 км

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

66. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) длина черенка садовой лопаты	1) 50 мм
Б) длина зубца вилки	2) 30 700 000 м
В) длина 40-й параллели Земли	3) 8,188 км
Г) высота горы Чо-Ойю	4) 140 см

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

67. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) рост альпиниста	1) $1{,}4 \cdot 10^9$ км
Б) толщина листа бумаги	2) 170 см
В) расстояние между Сатурном и Солнцем	3) 28 м
Г) высота десятиэтажного дома	4) 0,1 мм

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

68. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса листа бумаги формата А4	1) 70 кг
Б) масса пассажирского самолёта	2) 5 г
В) масса сборника задач по олимпиадной математике (в виде книги)	3) 1,1 кг
Г) масса взрослого сенбернара	4) 150 т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

69. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса шариковой ручки	1) 90 кг
Б) масса арбуза	2) 1,7 г
В) масса африканского страуса	3) 6,6 г
Г) масса колибри	4) 5000 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

70. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса атмосферы Земли	1) 0,55 ц
Б) масса одной тротуарной плитки	2) 450 г
В) масса взрослого леопарда	3) 2,4 кг
Г) масса одного мужского ботинка	4) $5{,}2 \cdot 10^{15}$ т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

71. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса самосвала, гружённого щебнем	1) 12 кг
Б) масса муравья	2) 100 г
В) масса офисного принтера	3) 12 т
Г) масса плитки шоколада	4) 0,5 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

72. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь одной клавиши на ноутбуке	1) 2,5 см^2
Б) площадь оконного стекла в квартире	2) 10 га
В) площадь одной риски на циферблате наручных часов	3) 7 мм^2
Г) площадь городского парка	4) 2 м^2

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

73. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь детской площадки	1) 1943 га
Б) площадь Диснейленда	2) 56,6 млн га
В) посевные площади России	3) 43 338 мм^2
Г) площадь стандартного компьютерного коврика	4) 100 м^2

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

74. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь крыши многоквартирного дома	1) 365 мм^2
Б) площадь суши на Земле	2) $149 \cdot 10^6$ км^2
В) площадь картины в галерее	3) 1200 м^2
Г) площадь лицевой стороны монеты	4) 302 000 мм^2

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

75. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь рабочей поверхности кухонной сковороды	1) 54 млн км^2
Б) площадь кухни в квартире	2) 300 см^2
В) площадь Евразии	3) 67 км^2
Г) площадь небольшого города	4) 12 м^2

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

76. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементами первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) объём бревна для строительства дома	1) 6,6 $м^3$
Б) объём стержня в гелевой авторучке	2) 5 $мм^3$
В) объём рисового зёрнышка	3) 1,5 $см^3$
Г) объём кузова самосвала	4) 250 $дм^3$

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

77. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) объём малолитражного аквариума	1) 6,1 $см^3$
Б) объём одной ягоды абрикоса	2) 10 л
В) объём Земли	3) 0,05 мл
Г) объём капли воды	4) $1083 \cdot 10^9$ $км^3$

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

78. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) объём Луны	1) 800 мл
Б) объём банки кофе	2) 4,2 $м^3$
В) объём горошины	3) 530 куб. мм
Г) объём бочки с молоком	4) $2{,}2 \cdot 10^{19}$ $м^3$

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

79. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) объём жидкости в ложке	1) 5 $см^3$
Б) объём бутылки с минеральной водой	2) 8 $м^3$
В) объём цистерны с бензином	3) $6{,}083 \cdot 10^{10}$ $км^3$
Г) объём планеты Меркурий	4) 1,5 л

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

80. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) продолжительность футбольного матча с учётом добавленного времени	1) 4,6 млрд лет
Б) возраст планеты Юпитер	2) 1 год
В) гарантийный срок для нового мобильного телефона	3) 13 часов
Г) продолжительность светового дня в Москве	4) 94 минуты

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

81. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) время полного сгорания обыкновенной спички	1) 5 суток
Б) продолжительность научной конференции	2) 36 с
В) продолжительность футбольного матча	3) 40 суток
Г) продолжительность полярной ночи в Мурманске	4) 1,5 ч

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

82. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) продолжительность школьной перемены	1) 6 месяцев
Б) продолжительность движения автобуса по маршруту Москва – Санкт-Петербург	2) 600 с
В) продолжительность прыжка с трамплина	3) 690 минут
Г) продолжительность Отечественной войны 1812 года	4) 12 с

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

83. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) продолжительность авиаперелёта от Москвы до Нью-Йорка	1) 1 секунда
Б) продолжительность железнодорожной поездки от Москвы до Владивостока	2) 10 часов
В) продолжительность летних каникул	3) 3 месяца
Г) продолжительность падения чашки на пол	4) 6 суток

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

Задания для контроля

Вариант 1

1. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) высота яблони	1) 4,2 м
Б) длина гвоздя	2) 3 см
В) расстояние между Солнцем и Полярной звездой	3) 320 км
Г) длина реки	4) $4{,}1 \cdot 10^{15}$ км

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

2. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса мобильного телефона	1) 3,2 кг
Б) масса мешка цемента	2) 0,1 г
В) масса строительного кирпича	3) 0,5 ц
Г) масса швейной иглы	4) 140 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

3. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь дна чайной чашки	1) 1,8 кв. м
Б) площадь лицевой стороны входной двери	2) 110 кв. см
В) площадь компьютерного монитора	3) 7 кв. дм
Г) площадь страницы паспорта	4) 27 кв. см

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

4. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) объём коробки для торта	1) 5,4 дм^3
Б) объём тюбика зубной пасты	2) 4918 км^3
В) объём воды в озере Мичиган	3) 444 л
Г) объём багажника легкового автомобиля	4) 100 мл

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

5. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) продолжительность пребывания космонавта на МКС	1) 2 ч
Б) продолжительность музыкального концерта	2) 1 с
В) продолжительность стоянки автобуса на промежуточной остановке	3) 169 суток
Г) продолжительность произнесения слова «город»	4) 1 минута

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

Вариант 2

1. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) диаметр Солнца	1) $3 \cdot 10^4$ мм
Б) высота ели	2) 90 мм
В) ширина ладони	3) 1,1 м
Г) длина брюк	4) $1,39 \cdot 10^6$ км

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

2. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса смартфона	1) $3{,}5 \cdot 10^{-2}$ кг
Б) масса полевой мыши	2) 10^{-1} кг
В) масса сокола	3) 9,8 т
Г) масса танка	4) $9{,}8 \cdot 10^{-4}$ т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

3. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь водной поверхности Байкала	1) 28 800 кв. см
Б) площадь г. Ростова-на-Дону	2) 31 722 кв. км
В) площадь классной доски	3) 2 кв. дм
Г) площадь подошвы утюга	4) 35400 га

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

4. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) объём шприца для инъекций	1) 2055 $м^3$
Б) объём воздушного шара	2) 120 000 $дм^3$
В) жизненная ёмкость лёгких человека	3) 5 мл
Г) объём вагона-цистерны	4) 5200 мл

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

5. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) продолжительность Великой Отечественной войны	1) 120 мин
Б) время, за которое солнечный свет достигает Земли	2) 3 века
В) продолжительность жизни дуба	3) 500 с
Г) продолжительность авиарейса Ростов—Москва	4) 34 032 ч

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

Вариант 3

1. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) длина дорожки в боулинге	1) 0,54 км
Б) высота Останкинской телебашни	2) $6{,}5 \cdot 10^3$ км
В) расстояние от Москвы до Владивостока	3) $5 \cdot 10^{-4}$ м
Г) диаметр песчинки	4) $1{,}8 \cdot 10^3$ см

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

2. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса кубометра древесины сосны	1) 0,011 кг
Б) масса щуки	2) 140 г
В) масса яблока	3) $6 \cdot 10^3$ г
Г) масса перепелиного яйца	4) 0,47 т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

3. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь классной комнаты	1) $1{,}95 \cdot 10^6$ кв. м
Б) площадь королевства Монако	2) 4800 кв. дм
В) площадь лесов в России	3) $1{,}34 \cdot 10^6$ кв. см
Г) площадь арены цирка	4) 800 000 га

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

4. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) объём апельсина	1) 25 $км^3$
Б) объём холодильника	2) 124 $см^3$
В) объём воды в Чудском озере	3) 24 мл
Г) объём спичечного коробка	4) 270 л

4. Зак. № 21

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

5. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) продолжительность ЕГЭ по математике базового уровня	1) 240 с
Б) продолжительность рабочего дня	2) 0,4 с
В) время закипания полного электрочайника	3) 8 ч
Г) продолжительность прыжка в высоту с места	4) 180 мин

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

Вариант 4

1. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) длина комариного хоботка	1) 20 км
Б) длина хобота у взрослого слона	2) 2,9 дм
В) длина шланга небольшого велонасоса	3) 1,5 мм
Г) протяжённость биатлонной трассы	4) 3 м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

2. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса металлической монеты достоинством 10 рублей	1) 25 т
Б) масса купюры достоинством в 5000 рублей	2) 5,65 г
В) масса курантов на Спасской башне Кремля	3) 6,7 кг
Г) масса арбуза	4) 1,02 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

3. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь московского Кремля	1) 12 дм^2
Б) площадь Москвы	2) 27,7 га
В) площадь поверхности табурета (сиденья)	3) 2511 км^2
Г) площадь циферблата обычного будильника	4) 50 см^2

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

4. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) объём воды в Тихом океане	1) 4,6 мл
Б) объём одной ягоды черешни	2) 8000 $см^3$
В) объём (кубатура) зрительного зала в крупном театре	3) 220 000 $м^3$
Г) объём дыни	4) $710{,}4 \cdot 10^3$ $км^3$

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

5. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) продолжительность урока в школе	1) 21 с
Б) продолжительность спуска лифта с восьмого этажа до первого	2) 7 суток
В) продолжительность похода	3) 90 дней
Г) продолжительность некоторого времени года	4) 45 мин

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

§ 3. График функции и элементы статистики (В3)

Главное при решении подобной задачи — внимательно прочитать условие и вопрос. При поиске ответа на этот вопрос иногда удобно прямо на графике провести недостающие линии, при необходимости дописать пропущенные числа.

84. На графике (см. рис. 1) показан выпуск продукции на медицинском предприятии с 5 по 7 октября. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — масса продукции в килограммах. Определите по графику массу продукции, выпущенную предприятием 7 октября к 15 часам.

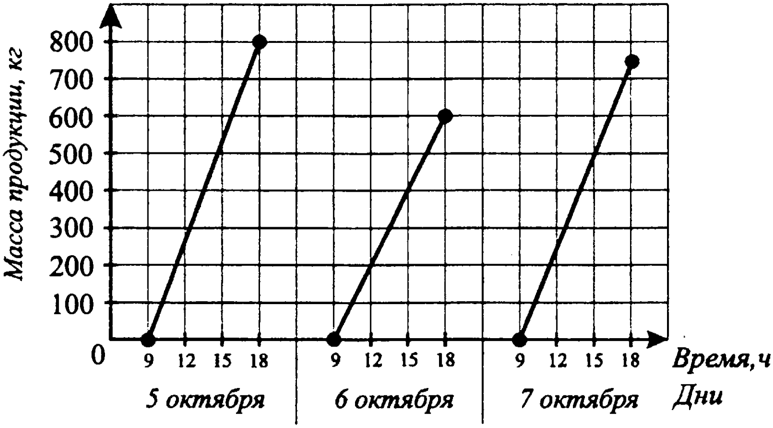


Рис. 1.

85. На графике (см. рис. 2) показано изменение количества выпавших осадков по области в течение месяца. Определите по графику, сколько осадков (в мм) выпало за этот месяц.

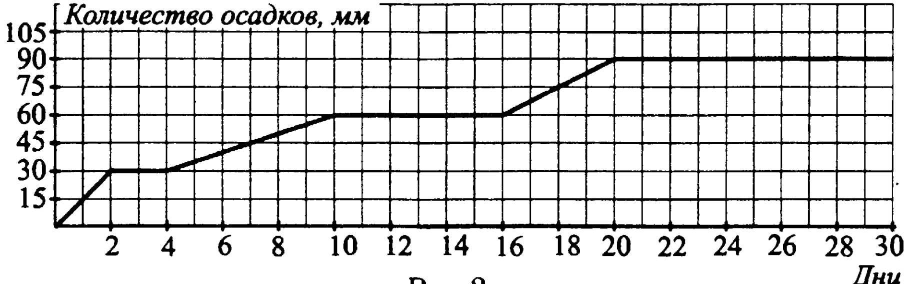


Рис. 2.

86. На рисунке 3 жирными точками показана динамика изменения курса доллара США по отношению к рублю во все рабочие дни с 08.01.12 по 05.02.12. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — курс доллара по отношению к рублю. Для наглядности жирные точки соединены линиями. Определите по рисунку курс доллара 15.01.12 (в рублях).

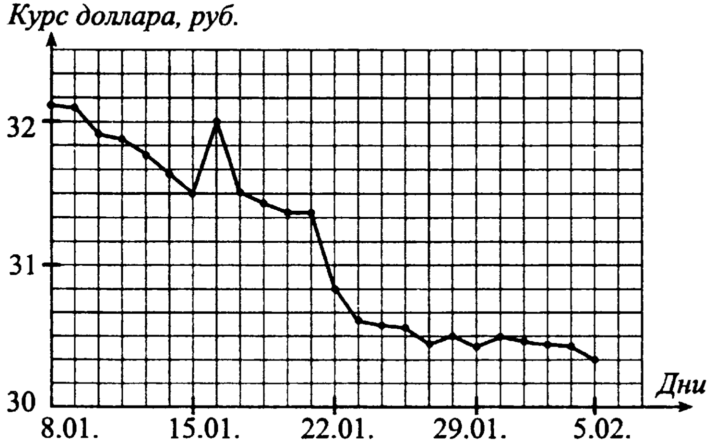


Рис. 3.

87. На рисунке 4 показана зависимость напряжения в электрической цепи фонарика от времени его работы. По горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, по вертикальной — напряжение в вольтах. Найдите по рисунку, какое напряжение (в вольтах) будет в электрической цепи через 2 часа после начала работы фонарика.

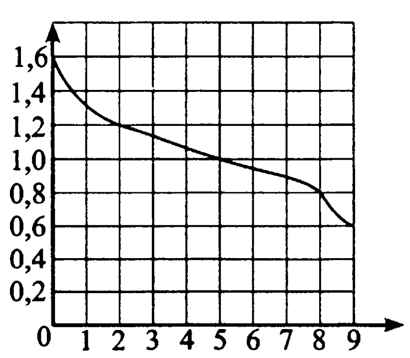


Рис. 4.

88. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке 5 эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в килограммах). Определите по графику, сколько килограммов реагента вступило в реакцию за первые четыре минуты?

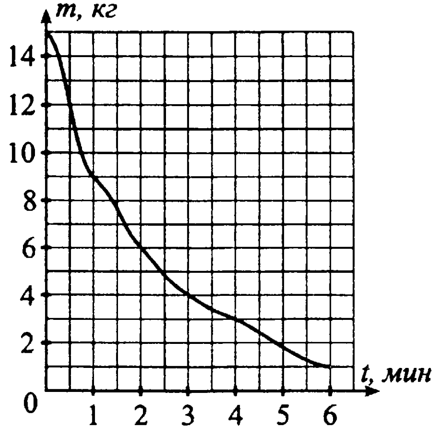


Рис. 5.

89. На графике (см. рис. 6) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближённо выражается формулой $v = 0{,}03n$, где n — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не меньше 75 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.

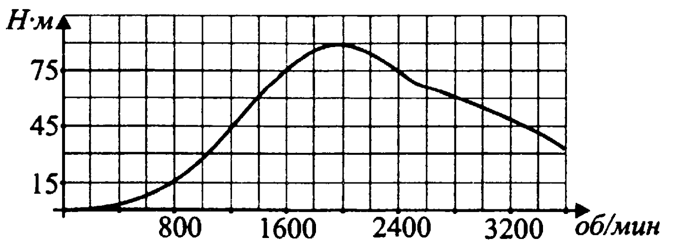


Рис. 6.

90. На графике (см. рис. 7) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0:00 часов четверга.

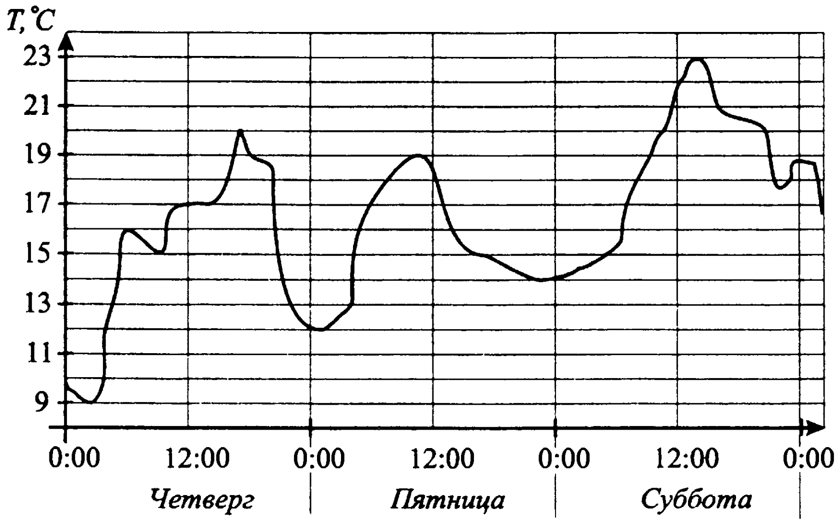


Рис. 7.

На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с пятницы на субботу (ночь длится с 19:00 до 5:00). Ответ дайте в градусах Цельсия.

91. На графике (см. рис. 8) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов 20 мая. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по рисунку 8, какой была наименьшая температура (в градусах Цельсия) за указанный период.

92. На рисунке 9 изображён график изменения курса евро в течение 5 дней, с 4 по 8 марта. Определите наименьшую стоимость евро 6 марта (в рублях).

93. На диаграмме (см. рис. 10) показано количество посетителей сайта информационного агентства в течение каждого часа 6 февраля 2010 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, за какой час на данном сайте побывало максимальное количество посетителей.

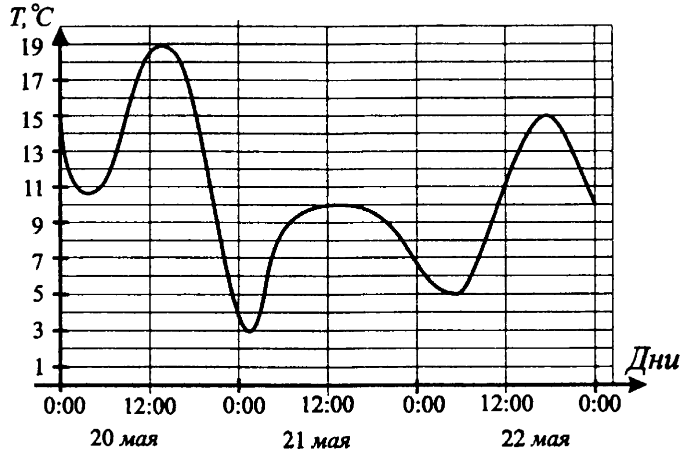


Рис. 8.

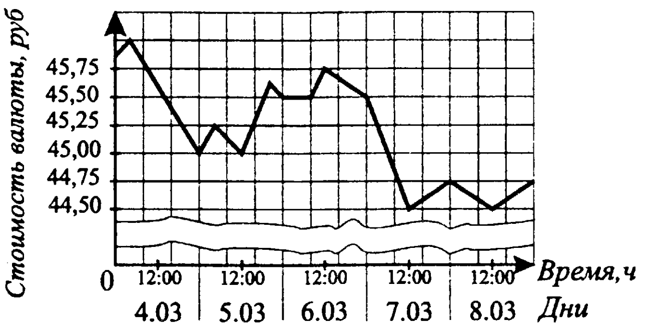


Рис. 9.

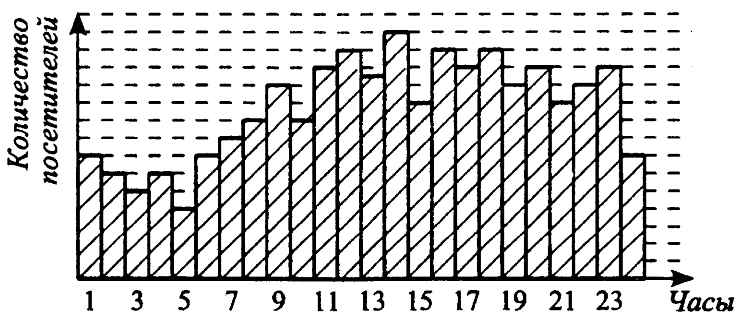


Рис. 10.

94. На графике (рис. 11) показано изменение удельной теплоёмкости водного раствора некоторого вещества в зависимости от температуры. По горизонтали указывается температура в градусах Цельсия, по вертикали —

удельная теплоёмкость в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$. Определите по рисунку наименьшую возможную удельную теплоёмкость раствора в диапазоне температур от 20° до 90°. Ответ дайте в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$.

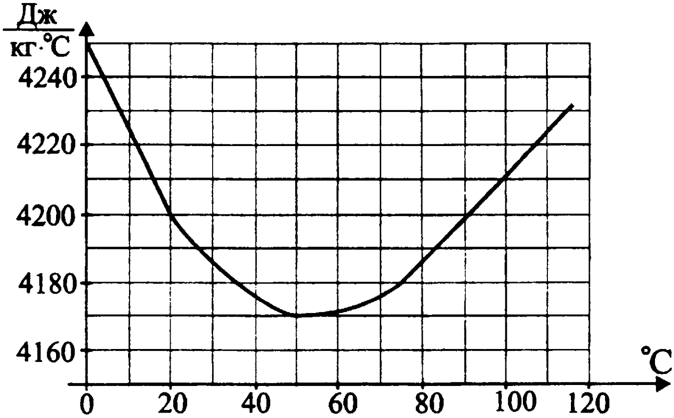


Рис. 11.

95. На графике (см. рис. 12) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0:00 часов четверга. Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха в четверг.

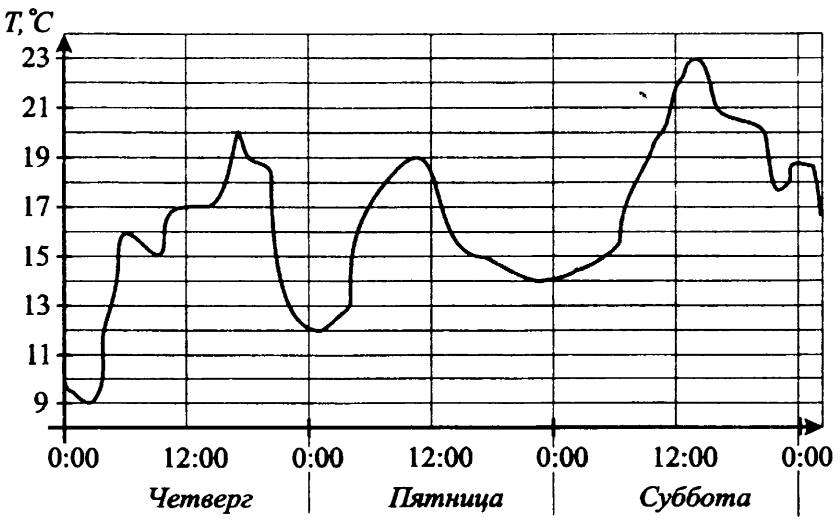


Рис. 12.

96. На графике (см. рис. 13) показано изменение температуры воздуха в период с 5 по 7 марта в некотором городе. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры 6 марта. Ответ дайте в градусах Цельсия.

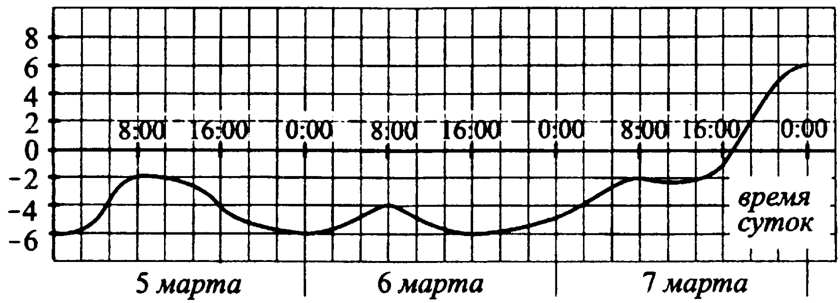


Рис. 13.

97. На графике (см. рис. 14) показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов 20 мая. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите, какой была разница между наибольшим и наименьшим значениями температуры за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

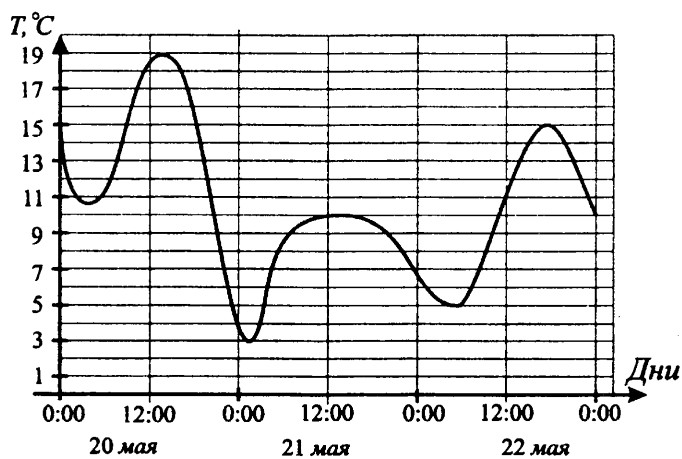


Рис. 14.

98. На диаграмме (см. рис. 15) показана среднемесячная температура воздуха в городе N за каждый месяц 1965 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.

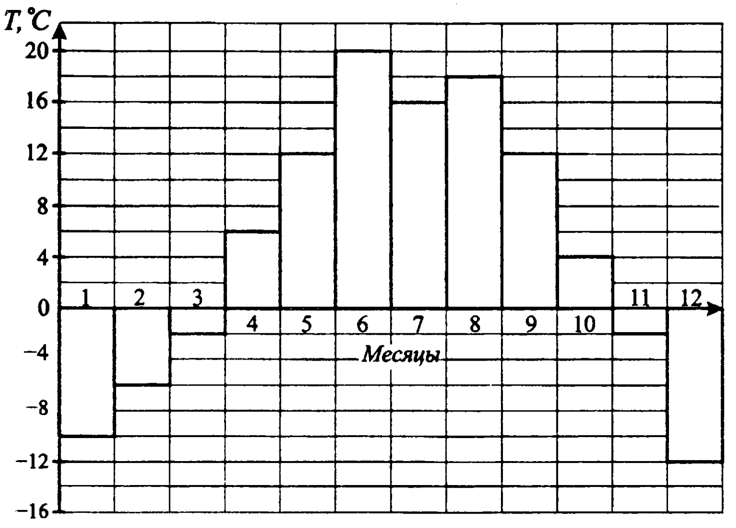


Рис. 15.

99. На диаграмме (см. рис. 16) показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в г. Челябинске. Найдите количество месяцев со среднемесячной температурой выше 10 °C.

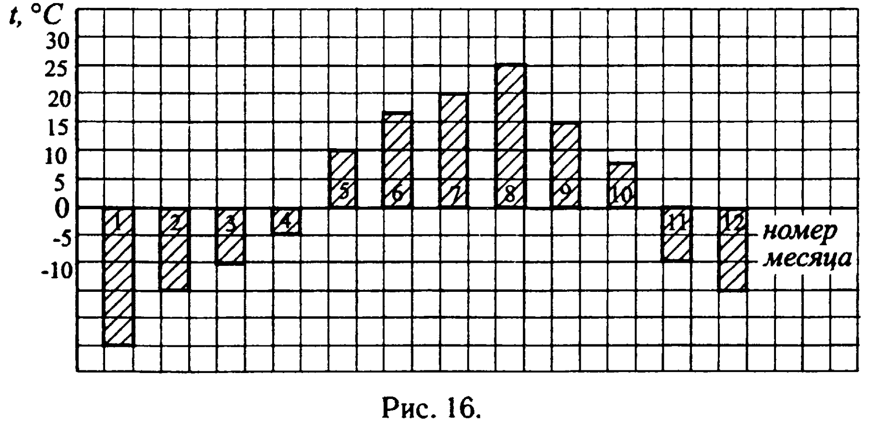


Рис. 16.

100. Первый посев семян огурцов рекомендуется проводить в мае при дневной температуре воздуха не менее +8 °С. На рисунке 17 жирными точками показано изменение дневной температуры воздуха с 1 по 11 мая. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите, в течение скольких дней за этот период можно было производить посев огурцов.

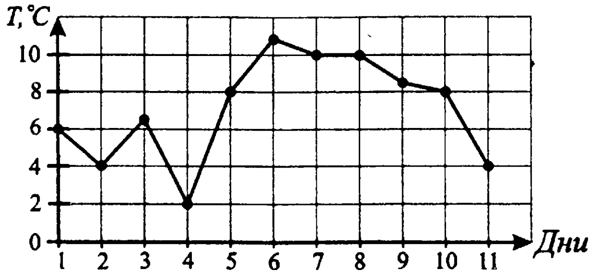


Рис. 17.

101. На рисунке 18 жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Ростове-на-Дону с 3 по 15 февраля 1999 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало более 2 мм осадков.

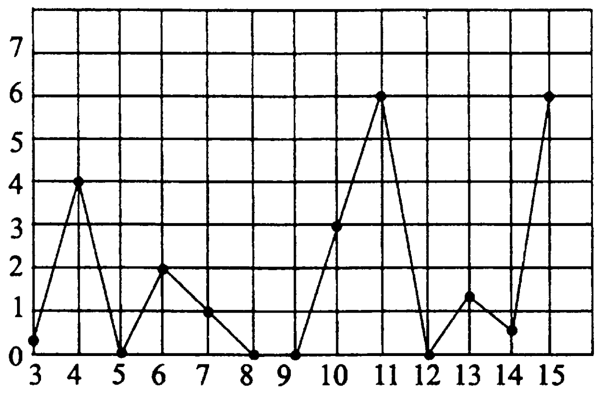


Рис. 18.

102. На рисунке 19 изображён график изменения скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час. Сколько часов автомобиль двигался со скоростью не менее 60 км/ч?

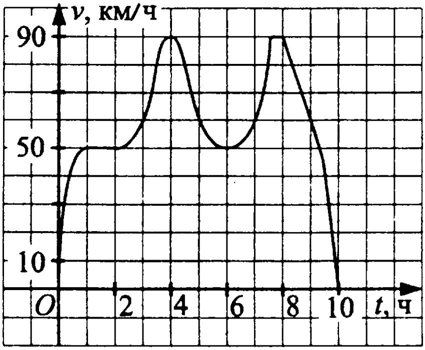


Рис. 19.

103. На графике (см. рис. 20) изображено изменение температуры воздуха в течение суток. Определите по графику, сколько часов в сутки температура воздуха была отрицательной.

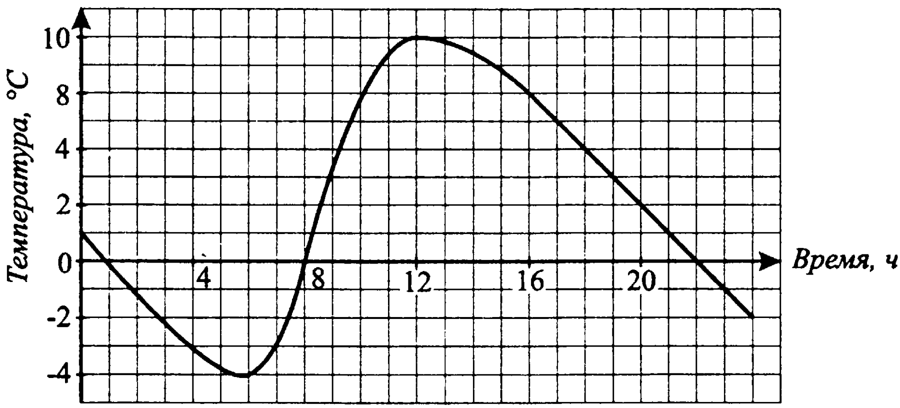


Рис. 20.

104. На рисунке 21 жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Ростове-на-Дону с 1 по 11 сентября 1902 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период было более 3 мм осадков.

105. По данным, представленным на диаграмме (см. рис. 22) за период с ноября 2008 года по ноябрь 2009 года, определите, сколько месяцев цена на палладий была менее 220 долларов США за унцию.

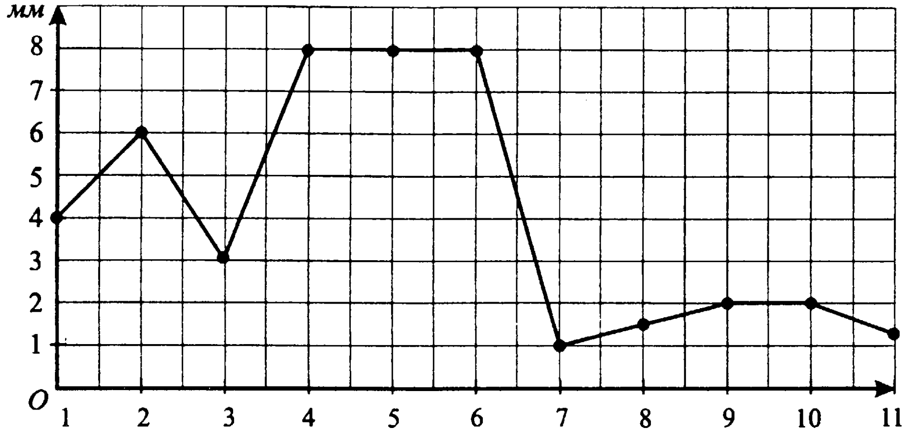


Рис. 21.

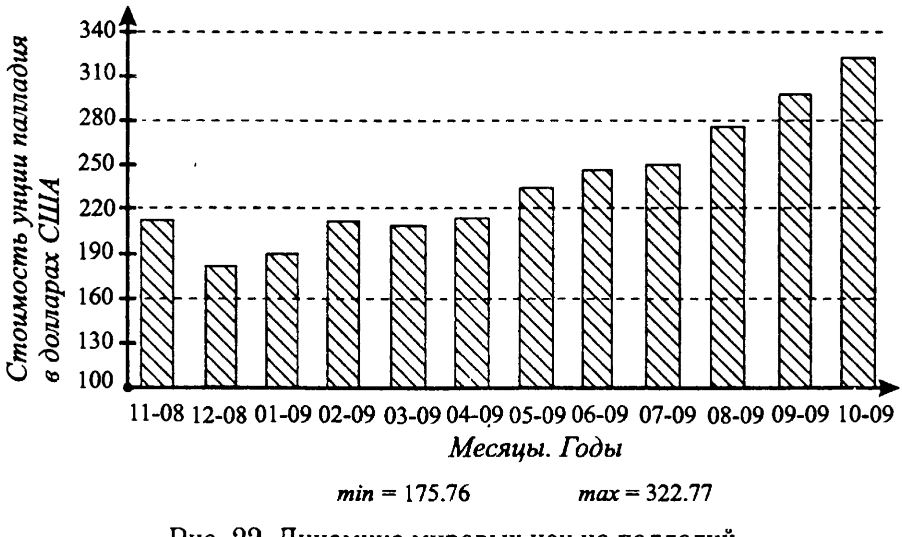


Рис. 22. Динамика мировых цен на палладий

3.1. Задачи на соответствие частей графика и характеристик

В заданиях базового экзамена по математике встречаются задания, в которых необходимо сопоставить отдельные фрагменты графика и соответствующие характеристики. В некоторых заданиях вместо графика может быть представлена столбчатая диаграмма. В этом параграфе рассмотрим подобные задания без использования производной. При решении таких заданий важно владеть понятиями возрастания и убывания функции, а так же её наибольшего и наименьшего значений.

106. На графике (см. рис. 23) точками показано атмосферное давление в городе Z. на протяжении трёх суток с 8 по 10 июля 1994 года. В течение суток давление замеряется 4 раза: в 00:00, 06:00, 12:00 и 18:00. По горизонтали указываются время и дата, по вертикали — давление в миллиметрах ртутного столба. Для наглядности точки соединены линиями.

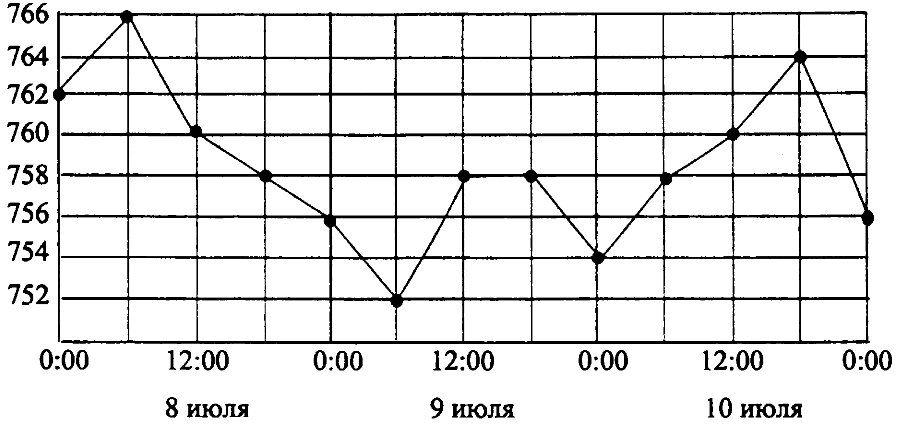


Рис. 23.

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику атмосферного давления в городе Z. в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) ночь 8 июля (с 00:00 до 6:00)	1) давление возросло на 6 мм ртутного столба
Б) утро 9 июля (с 06:00 до 12:00)	2) давление упало на 8 мм ртутного столба
В) день 9 июля (с 12:00 до 18:00)	3) давление не изменилось
Г) вечер 10 июля (с 18:00 до 00:00)	4) показание давления было наибольшим

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

107. На графике (см. рис. 24) изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в Н·м.

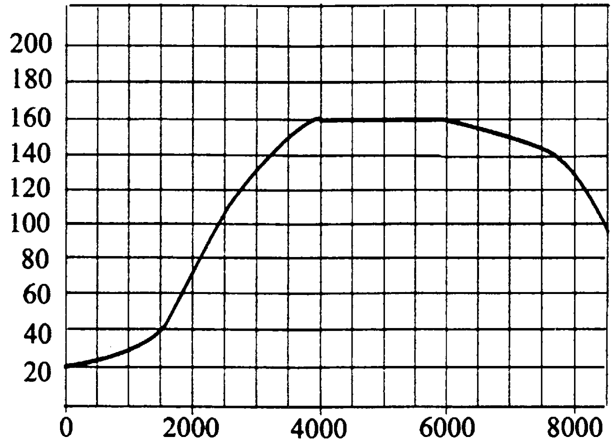


Рис. 24.

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу числа оборотов в минуту характеристику крутящего момента.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

А) 0 – 1500

Б) 1500 – 3000

В) 4500 – 6000

Г) 6500 – 8000

ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) при увеличении числа оборотов наблюдается самый быстрый рост крутящего момента

2) при увеличении числа оборотов крутящий момент уменьшается

3) при увеличении числа оборотов крутящий момент не превышает 40 Н·м на всём рассматриваемом интервале

4) при увеличении числа оборотов крутящий момент не меняется

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

108. На рисунке 25 точками изображено число родившихся мальчиков и число родившихся девочек за каждый календарный месяц 2014 года в поселковом роддоме. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество родившихся мальчиков и количество родившихся девочек (по отдельности). Для наглядности точки соединены линиями.

Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику рождаемости в этот период.

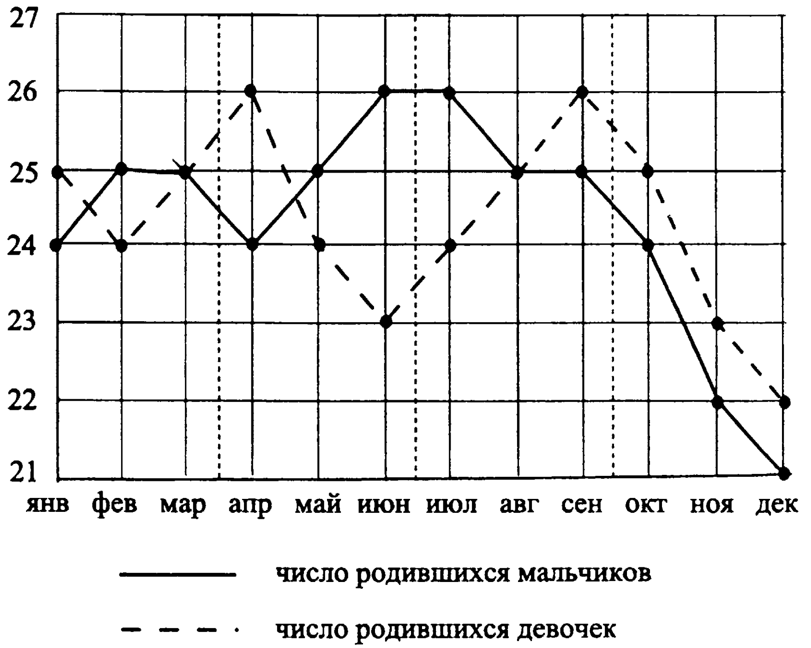


Рис. 25.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЖДАЕМОСТИ
А) 1-й квартал года	1) рождаемость девочек росла
Б) 2-й квартал года	2) в третий месяц квартала число родившихся девочек совпало с числом родившихся мальчиков
В) 3-й квартал года	3) рождаемость девочек в каждый месяц периода превышала рождаемость мальчиков
Г) 4-й квартал года	4) разность между числом родившихся мальчиков и числом родившихся девочек в один из месяцев этого периода достигает наибольшего значения за год

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

109. На рисунке 26 точками показано атмосферное давление в городе K. на протяжении трёх суток с 4 по 6 июня 1959 года. В течение суток давление замеряется 4 раза: в 00:00, 06:00, 12:00 и 18:00. По горизонтали указываются время и дата, по вертикали — давление в миллиметрах ртутного столба. Для наглядности точки соединены линиями.

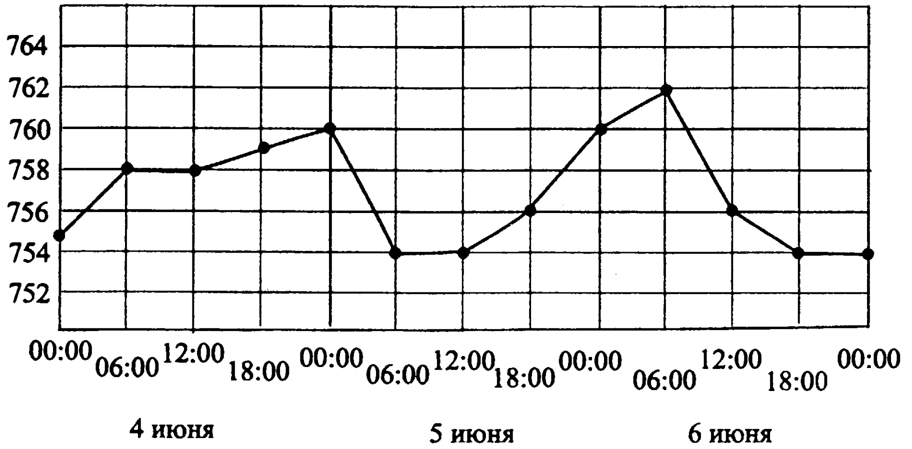


Рис. 26.

Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику атмосферного давления в городе K. в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) день 4 июня (с 12:00 до 18:00)	1) давление возрастало вплоть до максимального значения за период 4 – 6 июня
Б) утро 5 июня (с 06:00 до 12:00)	2) давление падало
В) ночь 6 июня (с 00:00 до 06:00)	3) давление не изменялось
Г) день 6 июня (с 12:00 до 18:00)	4) давление возрастало, но не превышало 760 мм ртутного столба

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

110. На диаграмме (см. рис. 27) изображён среднемесячный курс акций компании «Город Плюс» в период с июня 2014 до мая 2015 года. По горизонтали указываются месяц и год, по вертикали — цена акции в рублях.

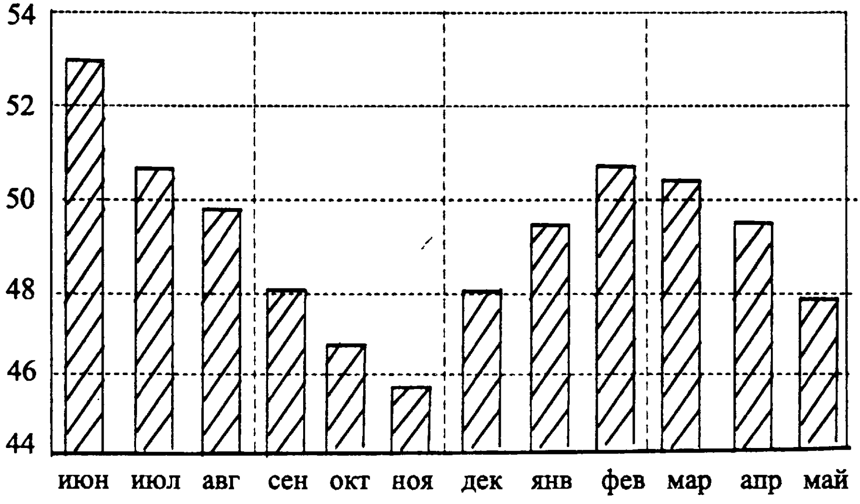


Рис. 27.

Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов характеристику курса акции.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) июнь-август 2014 года	1) содержит месяц с наименьшей ценой акции с июня 2014 года по май 2015 года
Б) сентябрь-ноябрь 2014	2) содержит месяц с наибольшей ценой акции с июня 2014 года по май 2015 года
В) декабрь 2014 года — февраль 2015 года	3) цена одной акции в первый месяц периода больше 50, но меньше 52 рублей
Г) март-май 2015 года	4) цена акции росла все месяцы периода

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Задания для контроля

Вариант 1

На рисунке 28 жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 27 мая по 24 июня 2006 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.

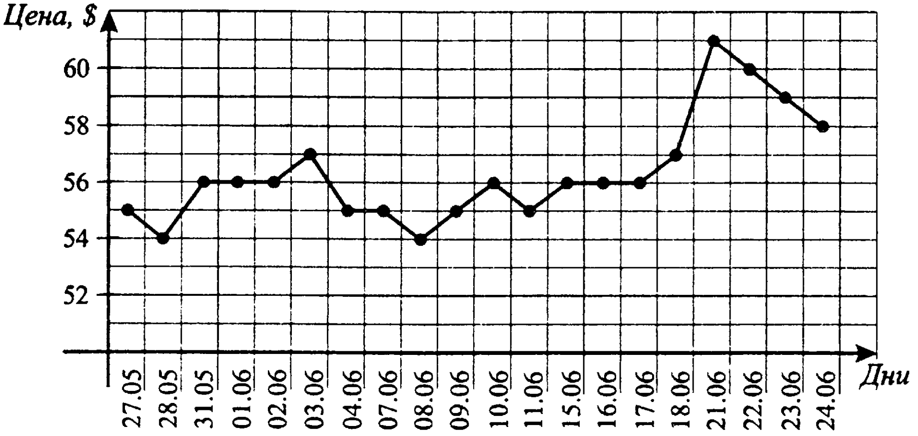


Рис. 28.

1. Определите по рисунку 28 разность между наибольшей и наименьшей ценами на нефть на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).

2. Определите по рисунку 28, сколько дней цена барреля нефти на момент закрытия торгов за данный период была больше 56 долларов США за баррель.

3. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке 29 эта зависимость представлена в виде графика. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за четыре минуты.

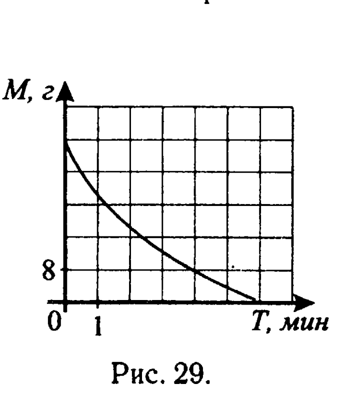


Рис. 29.

4. На диаграмме (см. рис. 30) показано распределение выплавки стали в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2000 год. Среди представленных стран первое место по выплавке стали занимал Китай, десятое место — Тайвань. Какое место занимала Япония?

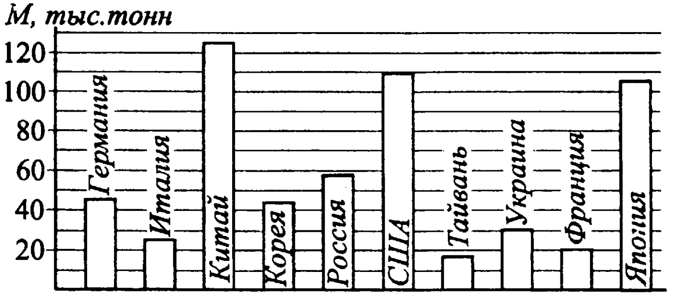


Рис. 30.

5. На графике (см. рис. 31) изображена зависимость скорости движения электропоезда от времени. На вертикальной оси отмечается скорость движения электропоезда в км/ч, на горизонтальной — время в минутах, прошедшее с начала движения.

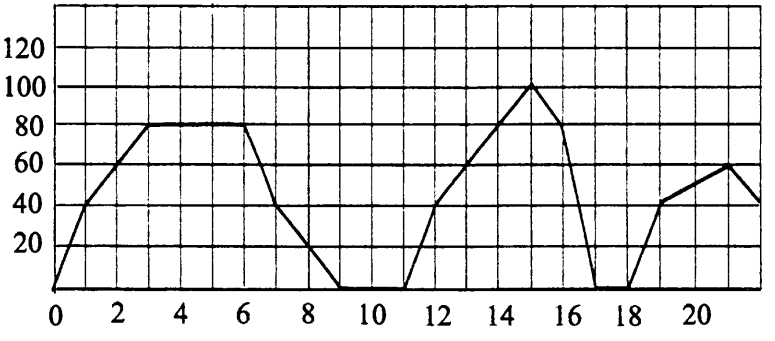


Рис. 31.

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику скорости движения на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 2 – 7	1) скорость оставалась постоянной на протяжении 3 минут
Б) 7 – 11	2) скорость возрастала, но не превышала 60 км
В) 14 – 18	3) была остановка длительностью ровно 2 минуты
Г) 18 – 21	4) в какой-то момент времени скорость приняла наибольшее значение

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Вариант 2

На рисунке 32 жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в городе N на каждый день с 15 по 28 апреля 2003 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией.

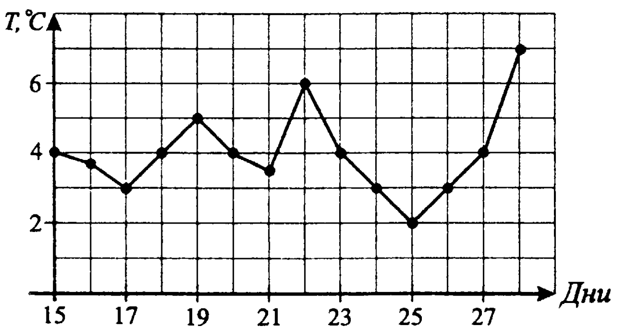


Рис. 32.

1. Определите по рисунку 32, какой была разница между наибольшим и наименьшим значениями среднесуточной температуры в городе N за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

2. Определите по рисунку 32, какого числа была наименьшая среднесуточная температура за указанный период.

3. На рисунке 33 жирными точками показана биржевая стоимость акций Газпрома с 27 мая по 24 июня 2010 г. На горизонтальной оси указаны даты, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях. Определите по

графику, в какой день биржевая стоимость акций Газпрома в первый раз превысила 161 рубль. Ответ дайте без указания месяца.

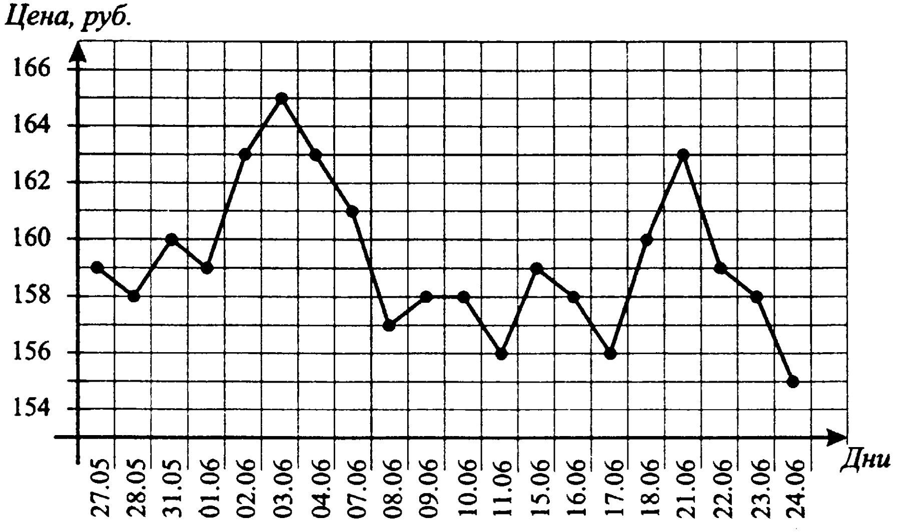


Рис. 33.

4. На диаграмме (см. рис. 34) показано количество посетителей сайта «Грибная поляна» во все дни с 10 по 29 июля 2011 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей за день больше, чем наименьшее количество посетителей.

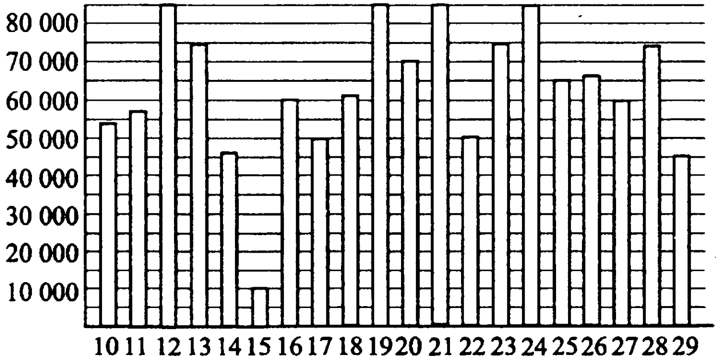


Рис. 34.

5. На рисунке 35 точками показана среднесуточная температура в городе *К*. в феврале 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — значения температуры в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией.

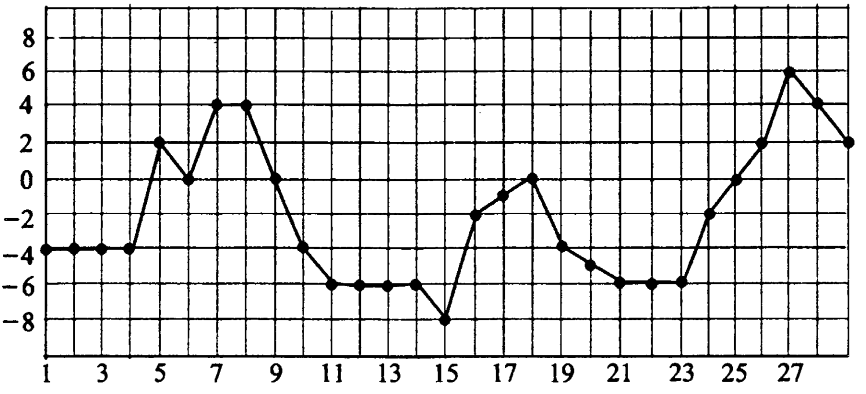


Рис. 35.

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику изменения температуры.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 1 – 7 февраля	1) среднесуточная температура достигла месячного максимума
Б) 8 – 14 февраля	2) среднесуточная температура достигла месячного минимума
В) 15 – 21 февраля	3) в течение первой половины недели среднесуточная температура не изменялась
Г) 22 – 28 февраля	4) среднесуточная температура не возрастала на протяжении всего периода

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Вариант 3

На рисунке 36 жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в городе N с 3 по 14 сентября 1980 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки соединены линией.

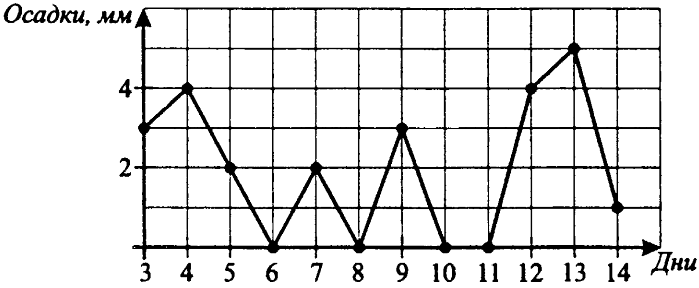


Рис. 36.

1. Определите по рисунку 36, сколько дней из данного периода выпадало более 3 миллиметров осадков.

2. Определите по рисунку 36, какого числа выпало наибольшее количество осадков.

3. Определите по рисунку 36, сколько дней из данного периода вообще не было осадков.

4. На диаграмме (см. рис. 37) показано количество посетителей сайта «Навигация» во все дни с 10 по 29 мая 2013 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, в какой день количество посетителей сайта впервые приняло наибольшее значение.

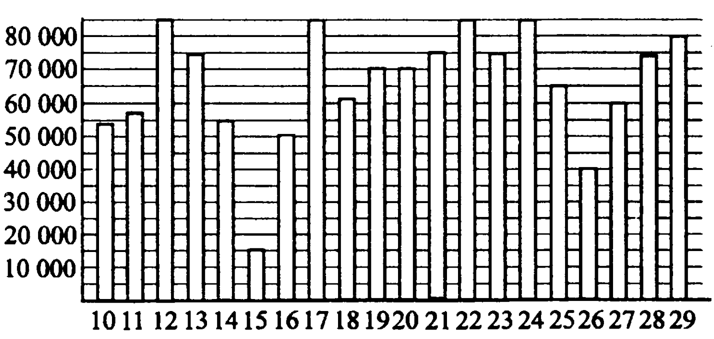


Рис. 37.

5. На рисунке 38 изображена сравнительная ежемесячная рождаемость в городском роддоме в 2014 году. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество родившихся.

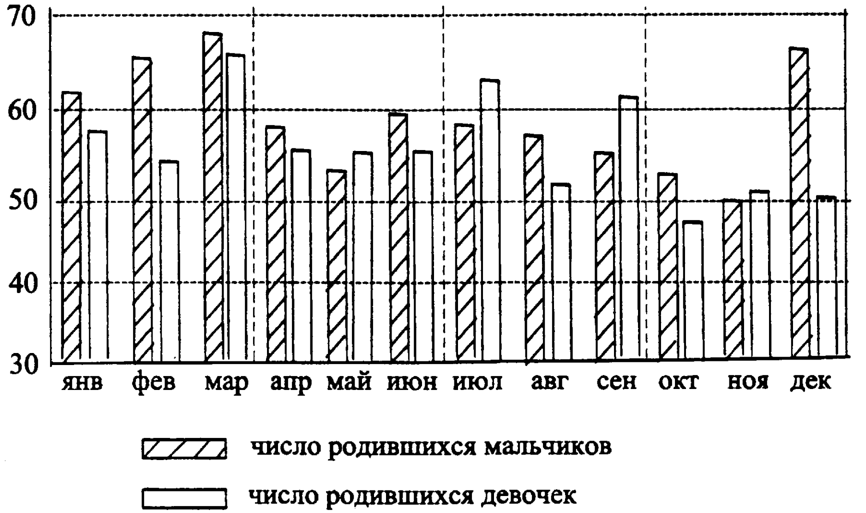


Рис. 38.

Пользуясь диаграммой, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику рождаемости за этот период.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЖДАЕМОСТИ
А) 1-й квартал года	1) рождаемость девочек не изменялась в течение данного периода
Б) 2-й квартал года	2) ежемесячная рождаемость мальчиков монотонно снижалась в течение данного периода
В) 3-й квартал года	3) рождаемость девочек была наименьшей за весь год
Г) 4-й квартал года	4) в каждом месяце рождаемость мальчиков была больше рождаемости девочек

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Вариант 4

1. На графике (см. рис. 39) показано изменение температуры воздуха в городе Долгопрудном на протяжении девяти суток, начиная с 0:00 часов 24 июня. На оси абсцисс отмечаются дни, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по рисунку, какой была наименьшая температура за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

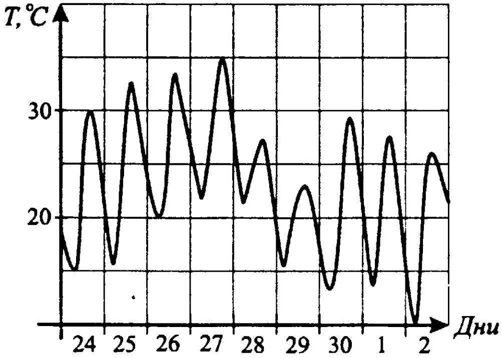


Рис. 39.

2. На графике (см. рис. 40) показано изменение температуры воздуха в Архангельске на протяжении девяти суток, начиная с 0:00 часов 24 июня. На оси абсцисс отмечается время, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по рисунку, какой была разница между наибольшим и наименьшим значениями температуры за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

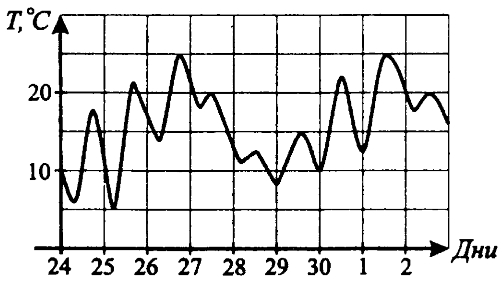


Рис. 40.

3. На рисунке 41 жирными точками показана биржевая стоимость акций АвтоВАЗа с 26 мая по 25 июня 2010 года на момент закрытия биржи. На горизонтальной оси указаны даты, а на вертикальной оси — цена одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите, в какой день цена акции первый раз превысила 14 рублей. В ответе укажите число без названия месяца.

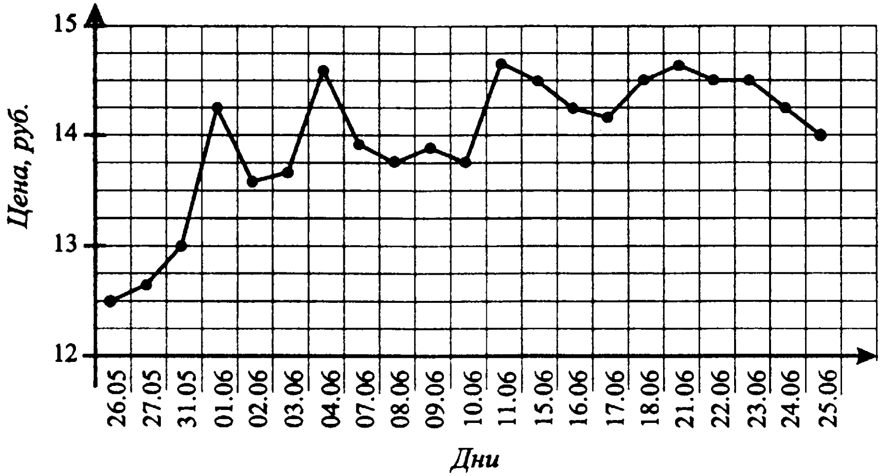


Рис. 41.

4. На диаграмме (см. рис. 42) показано количество посетителей сайта «Сказки» во все дни с 10 по 29 января 2012 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, сколько раз количество посетителей сайта было более 7.

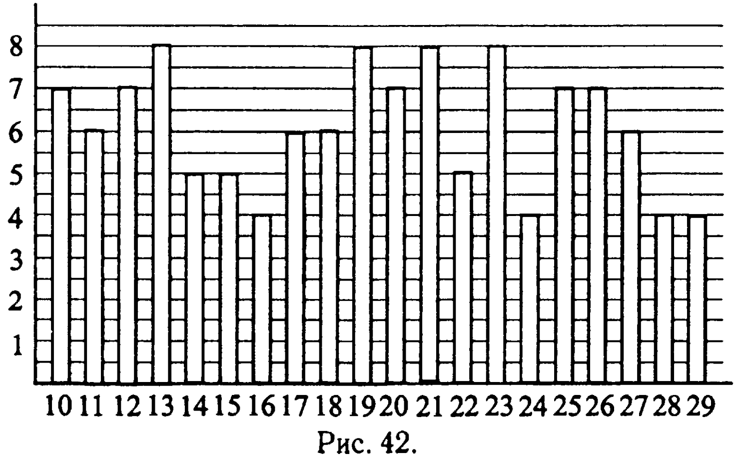


Рис. 42.

5. На графике (см. рис. 43) показано изменение скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат — скорость в километрах в час.

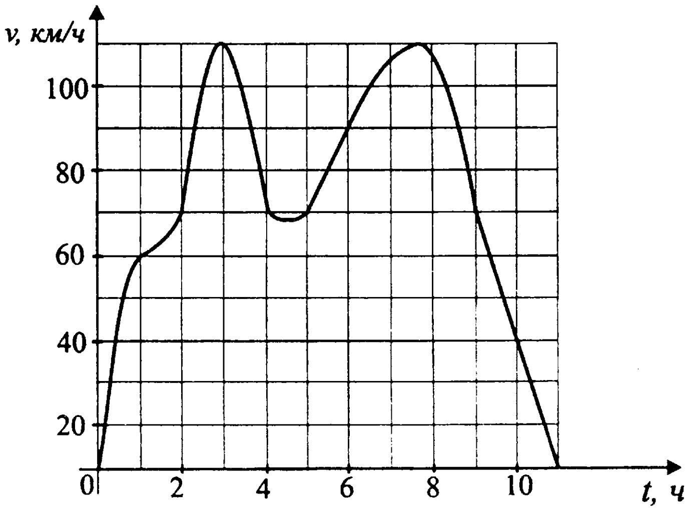


Рис. 43.

Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику процесса на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 0–3 ч	1) скорость монотонно убывает
Б) 3–6 ч	2) скорость не меньше 90 км/ч
В) 6–8 ч	3) скорость монотонно возрастает
Г) 8–10 ч	4) в начале интервала скорость убывает, а затем возрастает

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

§ 4. Выбор наилучшего варианта

111. Для остекления парника требуется заказать 20 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,85 м². В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м²)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	180	40	
Б	200	35	
В	220	25	При заказе на сумму больше 3500 руб. резка — бесплатно

112. Для остекления витрин требуется заказать 30 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла 0,4 м². В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м²)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	280	21	
Б	290	16	При заказе более 15 м² стекла резка — бесплатно
В	300	18	При заказе (без учёта резки) на сумму свыше 3500 руб. резка — бесплатно

113. Для того чтобы построить забор, фирме надо приобрести 2 тонны кирпича. Один кирпич весит 4 кг. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	**Цена за 1 кирпич (руб.)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия**
«Строитель»	17,5	1000	При покупке на сумму более 10 000 руб. — доставка бесплатно
«Атлант»	16	1500	При покупке больше 400 кирпичей — доставка со скидкой 50%
«Титан»	15,5	1200	

114. Семья из трёх человек едет из Волгодонска в Москву. Можно ехать на автобусе, а можно — на своей машине. Билет на автобус для одного человека стоит 1200 рублей. Автомобиль расходует 7 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 1100 км, а цена бензина равна 23,8 руб. за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой семьи?

115. Семья из трёх человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Красный Сулин. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1410 рублей. Автомобиль расходует 9 л бензина на 100 км, цена бензина — 27 рублей за литр, а расстояние по шоссе 1700 км. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

116. Семья из трёх человек планирует поехать из Волгограда в Москву. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1320 рублей. Автомобиль расходует 8 л бензина на 100 км, расстояние по шоссе равно 900 км, а цена бензина — 29,5 рублей за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

117. Для строительства дачного домика можно использовать один из двух типов стен: кирпичные или стены из керамзитоблоков. Для стен из керамзитоблоков необходимо 520 штук керамзитоблоков и 3 мешка цемента. Для кирпичных стен необходимо 2500 кирпичей и 7 мешков цемента. Один керамзитоблок стоит 40 рублей, кирпич стоит 8 рублей за штуку, а мешок цемента стоит 180 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

118. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 4,5 кубометра пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 3 тонны щебня и 30 мешков цемента. Кубометр пеноблока стоит 2100 рублей, щебень стоит 750 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 250 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

119. Для подготовки к школе ученику первого класса нужно приобрести в первую очередь комплект учебников с рабочими тетрадями, пенал с канцелярскими принадлежностями, портфель. В трёх торговых центрах маме предложили различные наборы (см. таблицу), она выбрала самый дешёвый вариант. Какую сумму (в рублях) заплатила мама, чтобы приобрести портфель, пенал, учебники?

Торговый центр	**Стоимость комплекта учебников (руб.)**	**Стоимость пенала (руб.)**	**Стоимость портфеля (руб.)**	**Дополнительные условия**
А	2150	45	850	
Б	2300	60	650	
В	2500	55	700	При покупке на сумму свыше 3000 рублей скидка 400 руб.

120. Из пункта A в пункт C ведут три дороги. Через пункт D едет грузовик со средней скоростью 40 км/ч, через пункт B едет легковой автомобиль со средней скоростью 70 км/ч. Через пункт E движется автобус со средней скоростью 48 км/ч. На рисунке 44 показана схема дорог и указано расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из пункта A. Какой автомобиль добрался до пункта C позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.

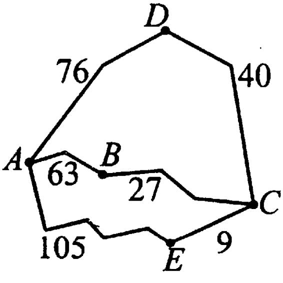


Рис. 44.

121. Из пункта A в пункт B ведут три дороги (см. рис. 45, расстояния указаны в километрах). Через пункт C едет автобус со средней скоростью 65 км/ч, через пункт D едет грузовик со средней скоростью 60 км/ч, и по третьей дороге без промежуточных пунктов едет легковой автомобиль со средней скоростью 80 км/ч. Все три автомашины выехали из пункта A одновременно. Найдите время в пути (в часах) автомашины, пришедшей позже всех.

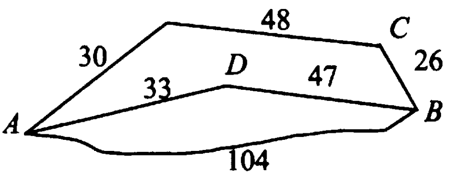


Рис. 45.

122. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. На рисунке 46 показана схема дорог и расстояние (в км) между пунктами по дорогам. Через пункт B идёт грузовик со средней скоростью 26 км/ч. Через пункт C идёт легковой автомобиль со средней скоростью 60 км/ч. Третья дорога без промежуточных пунктов, и по ней движется автобус со средней скоростью 45 км/ч. Все три транспортных средства выехали из A одновременно. Какое из них доберётся до D позже других? В ответе укажите, сколько часов оно находилось в дороге.

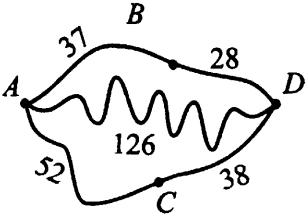


Рис. 46.

123. Предполагается поездка длительностью 45 минут. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Клиенту нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (руб.)
A	50	Нет	3
B	30	20 мин — 50 руб.	6
C	Бесплатно	10 мин — 60 руб.	4

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

124. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 45 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
«Рассвет»	50 руб.	15 мин — 150 руб.	17 руб.
«Сказка»	70 руб.	Нет	15 руб.
«Корсар»	Бесплатно	10 мин — 120 руб.	18 руб.

125. Своему клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок. Либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 15% на звонки абонентам стационарных телефонов, либо 25% на услуги мобильного интернета.

Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 200 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 300 рублей на звонки абонентам стационарных телефонов и 260 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку выгоднее выбрать? В ответе укажите, сколько рублей составит эта скидка.

126. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок. Либо скидку 20% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 10% на звонки в другие регионы, либо 30% на услуги мобильного интернета.

Клиент посмотрел распечатку расходов за прошлый месяц и выяснил, что он потратил 190 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 160 рублей на звонки в другие регионы и 120 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же (без учёта скидки), и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку следует выбрать? В ответе укажите, сколько рублей составит эта скидка, если клиент будет пользоваться всеми услугами в том же объёме.

127. Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок: либо скидку 30% на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе, либо скидку 10% на звонки в другие регионы, либо скидку 20% на услуги мобильного интернета. Клиент проанализировал распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 400 рублей на звонки абонентам других компаний в своём регионе, 600 рублей на звонки в другие регионы и 500 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Сколько рублей составит эта скидка, если звонки и пользование интернетом сохранятся в прежнем объёме?

128. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги R новостных сайтов на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -4 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = \left(\frac{2In + 2Op + 4Tr}{12} + 2\right) \cdot 25$. В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Найдите наибольший рейтинг среди сайтов, представленных в таблице. Ответ округлите до целого числа.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
myvrem.ru	−4	4	−4
poveru.com	0	−1	3
ogo123.ru	1	1	1
gorod17.ru	−2	4	0

129. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,005 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 6. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 2(2F + 3Q + 2D) - 0{,}005P$. В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей кухонных воздухоочистителей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице кухонных воздухоочистителей.

Модель воздухоочистителя	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5200	3	4	4
Б	5400	3	3	6
В	8800	6	6	3
Г	3600	3	3	4

130. Рейтинговое агентство определяет рейтинг жидких моющих средств для стиральных машин по соотношению «цена – качество». Рейтинг вычисляется на основе средней цены P, а также оценок эффективности удаления загрязнений F, безопасности и удобства хранения Q и экономичности D, которые эксперты оценивают целыми числами от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 3(F + Q) + D - 0{,}01P$.

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких марок моющих средств. Определите, какое моющее средство имеет наименьший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

Марка моющего средства	Средняя цена	Эффективность	Удобство и безопасность хранения	Экономичность
А	98	1	3	1
Б	169	2	3	2
В	186	3	4	3
Г	334	4	4	4

131. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P (в рублях), а также показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг вычисляется по формуле

$R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P$.

В таблице даны цены и показатели четырёх моделей пароварок. Найдите наивысший рейтинг пароварки из представленных в таблице моделей.

Модель пароварки	Цена пароварки (руб. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	890	2	1	1
Б	1469	4	3	2
В	1789	4	4	4
Г	1564	2	1	4

132. Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S, комфорта C, функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны показатели трёх моделей автомобилей. Найдите наивысший рейтинг автомобиля из представленных в таблице моделей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2	5	2	4	3
Б	3	3	3	5	5
В	5	4	4	4	4

133. Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинг новостных сайтов на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Рейтинг вычисляется по формуле

$$R = 25\left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2\right).$$

В таблице даны показатели четырёх новостных сайтов. Найдите наивысший рейтинг новостного сайта из представленных в таблице.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
А	1	−2	0
Б	−2	1	1
В	2	1	0
Г	1	1	1

$\boxed{\textbf{134.}}$ В таблице приведены условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 10 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
A	120 руб. в год	8
B	15 руб. в месяц	8,5
C	Бесплатно	7,5

*В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

**В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

135. В таблице даны условия банковского вклада в трёх различных банках.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	400 руб. в год	4%
Б	20 руб. в месяц	3,5%
В	Бесплатно	2%

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

Предполагается, что клиент кладёт на счёт 20 000 рублей сроком на 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

136. В таблице даны условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 20 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	100 руб. в год	3
Б	15 руб. в месяц	5
В	Бесплатно	2

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

137. В среднем гражданин Иван Семёнович в дневное время расходует 110 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 135 кВт·ч электроэнергии. Раньше у Ивана Семёновича в квартире был установлен однотарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 3,23 руб. за кВт·ч. Год назад Иван Семёнович установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 3,43 руб. за кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 2,68 руб. за кВт·ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы Иван Семёнович за этот период, если бы не поменял счётчик? Ответ дайте в рублях.

138. В среднем гражданин Д. в дневное время расходует 150 кВт·ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 70 кВт·ч электроэнергии. Раньше у Д. в квартире был установлен однотарифный счётчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,80 руб. за кВт·ч. Год назад Д. установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,80 руб. за кВт·ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 1,10 руб. за кВт·ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы Д. за этот период, если бы не поменял счётчик? Ответ дайте в рублях.

139. В таблице даны результаты олимпиад по физике и химии, прошедших в 9 «В» классе.

Номер учащегося	Балл по физике	Балл по химии
1	58	63
2	74	48
3	42	88
4	58	68
5	62	84
6	41	54
7	46	70
8	62	63
9	93	19

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 125 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 70 баллов.

Какие учащиеся 9 «В» не набрали 70 баллов по химии и получили похвальные грамоты? Укажите соответствующие номера без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

140. В таблице даны результаты олимпиад по истории и граждановедению, прошедших в 7 «Е» классе.

Номер учащегося	Балл по истории	Балл по граждановедению
1	61	68
2	71	59
3	51	89
4	70	63
5	64	65
6	59	67
7	68	58
8	48	77
9	65	74

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 130 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 69 баллов.

Какие учащиеся 7 «Е» не набрали 69 баллов по истории и получили похвальные грамоты? Укажите соответствующие номера без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

141. Расписание поездов Ростов-на-Дону — Волгоград и стоимость билетов представлены в таблице.

Номер поезда	Время отправления	Время прибытия (на следующие сутки)	Стоимость билета (в рублях)
1	19 : 00	05 : 40	1240
2	19 : 20	05 : 45	1200
3	19 : 25	05 : 35	1320
4	19 : 43	07 : 32	1200
5	20 : 58	07 : 40	1350
6	21 : 10	07 : 35	1200
7	22 : 05	08 : 12	1400
8	23 : 10	09 : 15	1250

Георгию Климовичу нужно добраться из Ростова-на-Дону в Волгоград поездом. При этом ему необходимо приехать в Волгоград не раньше 07:30, в пути провести не более 11 часов и заплатить за билет не больше 1300 рублей.

В ответе укажите какой-нибудь один подходящий номер поезда.

142. В таблице представлены сведения о шести видах натурального мультифруктового сока, продающегося в специализированном магазине.

Номер сока	Состав	Тип	Стоимость (в рублях)
1	Апельсин, лимон, манго, банан	Импортный	310
2	Апельсин, манго, киви	Импортный	180
3	Виноград, яблоко, лимон	Отечественный	230
4	Яблоко, слива, абрикос	Отечественный	120
5	Апельсин, гуава, киви, лайм	Импортный	200
6	Апельсин, манго, гуава	Импортный	380

Алевтине нужно купить три разные упаковки сока так, чтобы среди них была хотя бы одна упаковка с отечественным соком, хотя бы одна с импортным, хотя бы одна содержала лимон. Какие соки должна купить Алевтина, если она рассчитывает потратить на всё не более 600 рублей?

В ответе укажите какой-то один набор номеров соков без пробелов и дополнительных символов.

143. В городе Новокамышовск имеется пять музеев: архитектурный, литературный, краеведческий, музей изобразительных искусств и музей естественных наук. В кассах продаётся шесть видов билетов, каждый из которых позволяет посетить один или два музея. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

Номер билета	Музеи для посещения	Стоимость (в рублях)
1	Архитектурный	120
2	Литературный	90
3	Краеведческий и естественных наук	170
4	Архитектурный и изобразительных искусств	250
5	Изобразительных наук и литературный	200
6	Краеведческий и архитектурный	190

Какие билеты должна купить Анастасия Филипповна, чтобы посетить все пять музеев и затратить наименьшую сумму? В ответе укажите какой-то один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных знаков.

144. В кинотеатре показывают пять кинофильмов, при этом проводится необычная акция: в кассах продаётся шесть видов билетов, каждый из которых позволяет посетить один или два фильма. Сведения о стоимости билетов представлены в таблице.

Номер билета	**Кинофильмы**	**Стоимость (в рублях)**
1	Фильм A	220
2	Фильм B	190
3	Фильм A и фильм D	400
4	Фильм B и фильм C	420
5	Фильм C и фильм D	490
6	Фильм B и фильм E	500

Какие билеты должна купить Маша, чтобы посетить все пять фильмов и потратить наименьшую сумму?

В ответе укажите какой-то один набор номеров билетов без пробелов, запятых и других дополнительных знаков.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Для проведения детского праздника нужно заказать 72 одинаковых подарка с конфетами в одной из трёх фирм. В каждом подарке 2 кг конфет. В таблице приведены цены на конфеты, а также на подарочные упаковки. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	**Цена конфет (руб. за 1 кг)**	**Цена упаковки (руб. за один подарок)**
А	150	45
Б	155	30
В	165	20

2. Чтобы перевезти 70 легковых автомобилей на 1100 км, можно воспользоваться услугами одной из трёх транспортных компаний. Стоимость перевозки и вместимость грузовиков для каждой компании указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Компания	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 50 км)	Количество автомобилей в одном грузовике
А	833	6
Б	1630	12
В	2380	18

3. Оператор сотовой связи предлагает три тарифных плана. В таблице для каждого тарифного плана указана месячная абонентская плата, включённое в тариф время разговора и цена каждой минуты сверх включённого времени.

Тарифный план	Абонентская плата	Цена каждой минуты сверх включённого времени
Тариф «200»	300 руб. за 200 мин в месяц	2 руб. за 1 мин сверх 200 мин
Тариф «400»	550 руб. за 400 мин в месяц	1,5 руб. за 1 мин сверх 400 мин
Тариф «600»	850 руб. за 600 мин в месяц	1 руб. за 1 мин сверх 600 мин

Абонент предполагает, что его телефонные разговоры составят 500 минут в месяц и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, выбрав самый дешёвый тарифный план?

4. В качестве новогоднего подарка оператор сотовой связи предлагает своим пользователям на выбор одну из трёх скидок: 35% на звонки внутри сети, 25% на звонки абонентам других компаний или 30% на отправку текстовых сообщений. Клиент тратит в месяц 150 рублей на звонки внутри сети, 250 рублей на звонки абонентам других компаний и 200 рублей на отправку текстовых сообщений. Какую скидку нужно выбрать клиенту, чтобы получить наибольшую выгоду? В ответе запишите, сколько рублей составит эта скидка.

5. Расписание поездов Город N. — Город К. и стоимость билетов представлены в таблице.

Номер поезда	Время отправления	Время прибытия (на следующие сутки)	Стоимость билета (в рублях)
1	21 : 00	03 : 20	1120
2	21 : 30	04 : 55	980
3	21 : 50	05 : 20	2350
4	22 : 20	05 : 35	860
5	23 : 00	05 : 50	1210
6	23 : 20	06 : 15	1150
7	23 : 35	06 : 20	1000
8	23 : 50	07 : 00	950

Наталье Анатольевне нужно добраться из города N. в город К. поездом.

При этом ей необходимо приехать в город К. не раньше 05:30, в пути провести не более 7 часов и заплатить за билет не больше 1100 рублей.

В ответе укажите какой-нибудь один подходящий номер поезда.

Вариант 2

1. Клиент кладёт на банковский счёт 30 000 рублей на срок 1 год. Какой вклад он должен выбрать, чтобы к концу этого срока получить на счету наибольшую сумму? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Вклад	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	400 руб. в год	3
Б	80 руб. в месяц	4,5
В	Бесплатно	2

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

2. Спортивный центр предлагает своим посетителям три программы занятий.

Программа	**Плата в месяц**	**Стоимость дополнительных занятий**
«Первая»	нет	400 руб. за занятие
«Вторая»	4300 руб. в месяц за 12 занятий	400 руб. за каждое занятие сверх 12
«Третья»	7900 руб. в месяц за 24 занятия	400 руб. за каждое занятие сверх 24

Клиент желает посетить в спортивном центре 16 занятий в месяц и исходя из этого выбирает наиболее дешёвую программу. Сколько рублей заплатит клиент за месяц?

3. Для съёмок исторического фильма нужно заказать 26 комплектов кожаной брони в одной из трёх фирм. На каждый комплект расходуется 2,5 м^2 кожи. В таблице приведена цена кожи, а также пошива брони. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	**Цена кожи (руб. за 1 м^2)**	**Цена пошива (руб. за один комплект)**
А	300	3200
Б	320	3000
В	350	2800

4. Чтобы перевезти 315 человек на 250 км, можно воспользоваться предложением одной из трёх туристических фирм. Стоимость перевозки и количество мест в автобусах для каждой фирмы указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Фирма	**Стоимость перевозки одним автобусом (руб. на 100 км)**	**Количество мест**
А	1280	43
Б	2030	68
В	2050	73

5. Покупатель планирует купить необходимые предметы посуды в магазине. Сведения о ценах на некоторые товары представлены в таблице.

Номер товара	Товар	Стоимость (рублей)
1	Тарелка	50
2	Миска	70
3	Миска, чашка	120
4	Тарелка, миска	110
5	Ложка	30
6	Тарелка, чашка	95

Пользуясь таблицей, подберите комплект покупок так, чтобы покупатель купил четыре предмета: тарелку, миску, чашку и ложку, а суммарная стоимость была меньше 200 рублей. В ответе для собранного комплекта укажите номера товаров без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Вариант 3

1. Для кровельных работ можно использовать один из двух видов материалов: металлочерепицу или мягкую черепицу. Для первого вида работ понадобится 60 м^2 металлочерепицы и 10 кг крепежа. Для второго — 40 м^2 мягкой черепицы и 7 кг крепежа. Квадратный метр металлочерепицы стоит 220 рублей, квадратный метр мягкой черепицы стоит 380 рублей, 1 кг крепежа стоит 40 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

2. Для отделки фонтана управление по благоустройству города должно заказать 60 мраморных плит одной из трёх фирм. Площадь каждой плиты составляет 0,35 м^2. Цена материала, а также стоимость резки указаны в таблице. Сколько будет стоить заказ, если выбрать самый дешёвый вариант?

Фирма	Цена мрамора (руб. за 1 м^2)	Резка мрамора (руб. за одну плиту)	Дополнительные условия
А	4200	150	—
Б	4700	120	—
В	5200	80	При заказе на сумму больше 100 000 руб. резка бесплатно

3. Компания из четырёх человек едет из Москвы в Новосибирск. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Один билет на поезд стоит 1300 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 3200 км, а цена бензина равна 19 руб. за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой компании?

4. Строительной фирме нужно приобрести 2650 килограммов листовой стали у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	**Стоимость стали (руб. за тонну)**	**Стоимость доставки (руб.)**	**Дополнительные условия**
А	25 600	3400	
Б	23 700	6500	При заказе на сумму больше 75 000 руб. доставка бесплатно
В	24 600	4500	При заказе более 2,5 тонн доставка бесплатно

5. В таблице представлены сведения о видах пиццы в интернет-магазине.

Номер пиццы	**Состав пиццы/название**	**Вид**	**Стоимость (в рублях)**
1	Зелень, оливки, сыр	Вегетарианская	280
2	Говядина, свинина, сыр	Мясная	560
3	Сыр, свинина, оливки	Мясная	380
4	Сыр, овощи	Вегетарианская	390
5	Курица, грибы, перец	Мясная	400
6	Ветчина, сыр	Мясная	520

Игорю нужно купить три разные пиццы так, чтобы среди них была хотя бы одна с грибами, хотя бы одна вегетарианская и хотя бы одна мясная. Какие пиццы может купить Игорь, если он рассчитывает потратить на всё не более 1100 рублей?

В ответе укажите какой-то один набор номеров пиццы без пробелов и дополнительных символов.

Вариант 4

1. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,02 средней цены C, показателей функциональности P, качества K и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 3(3P + 4K + 2D) - 0{,}02C$.

В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических чайников. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических чайников.

Модель чайника	**Средняя цена**	**Функциональность**	**Качество**	**Дизайн**
А	2900	2	1	2
Б	4500	3	3	4
В	3100	4	2	4
Г	3200	2	4	3

2. Для перевозки 65 тонн груза на 1800 км можно использовать одну из трёх компаний. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждой компании указаны в таблице. Сколько рублей придётся заплатить за самую дешёвую перевозку?

Компания	**Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)**	**Грузоподъёмность одного автомобиля (тонн)**
А	4200	4
Б	6100	6
В	11600	12

3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 15 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 5%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Н. хочет приобрести кондиционер ценой 9900 руб., соковыжималку ценой 5800 руб. и кулер ценой 5200 руб. В каком случае Н. заплатит за покупку меньше всего?

1) Н. купит все три товара сразу

2) Н. купит сначала кондиционер и соковыжималку, а потом кулер со скидкой.

3) Н. купит сначала кондиционер и кулер, а потом соковыжималку со скидкой.

В ответе укажите, сколько рублей заплатит Н. за покупку в этом случае.

4. В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трёх магазинах Москвы (по данным на февраль 2013 года).

Наименование продукта	A	B	C
Сахар (1 кг)	50	26	72
Молоко (1 литр)	50	44	94
Картофель (1 кг)	22	13	74
Яйца (1 десяток)	99	44	92
Мясо (говядина)	459	487	890
Растительное масло (1 литр)	90	72	99

Определите, в каком из этих магазинов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 л молока, 3 кг картофеля, 2 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответе укажите стоимость данного набора продуктов в этом магазине (в рублях).

5. Маша решила посетить парк аттракционов. Сведения о билетах на аттракционы представлены в таблицах. Некоторые билеты позволяют посетить сразу два аттракциона.

Номер билета	Аттракционы	Стоимость (в руб.)
1	Колесо обозрения	320
2	Комната смеха	130
3	Гидродром	390
4	Комната смеха, гидродром	450
5	Тир, гидродром	530
6	Колесо обозрения, комната смеха	390

Пользуясь таблицей, подберите билеты так, чтобы Маша посетила все четыре аттракциона: колесо обозрения, комнату смеха, тир и гидродром, а суммарная стоимость билетов не превысила 950 рублей.

В ответе укажите какой-нибудь один набор номеров билетов без пробелов, запятых и каких-либо других дополнительных знаков.

§ 5. Текстовые задачи

5.1. Движение

Чтобы решать задачи на движение, достаточно знать формулу пути при равномерном движении (то есть движении с постоянной скоростью) и её следствия для вычисления времени или скорости:

$$s = vt;\quad v = \frac{s}{t};\quad t = \frac{s}{v}.$$

Здесь s — путь, t — время, v — скорость.

В задачах на движение по течению или против течения реки нужно к тому же понимать, что при движении по течению (иногда говорят «вниз по реке») скорость реки прибавляется, а против течения («вверх по реке») — вычитается из собственной скорости транспорта (лодки, катера, теплохода). Скорость плота (бревна) совпадает со скоростью течения реки. На озере вода считается стоячей (скорость течения нулевая).

Чтобы составить уравнение, данные из условия и их следствия лучше всего занести в таблицу.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
A	s_1	v_1	t_1
B	s_2	v_2	t_2

145. Из одного города в другой выехали одновременно двое байкеров. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 80 км/ч, а вторую — со скоростью на 24 км/ч больше, чем скорость первого байкера. Определите скорость первого байкера, если в другой город они приехали одновременно. Ответ дайте в км/ч.

146. Из одного пункта в другой одновременно выехали два велосипедиста. Первый велосипедист проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй велосипедист проехал первую половину пути со скоростью 15 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью на 4,5 км/ч большей скорости первого велосипедиста, в результате чего прибыл в другой пункт одновременно с первым велосипедистом. Найдите скорость первого велосипедиста (в км/ч).

147. От пристани A к пристани B, расстояние между которыми 150 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 ч 30 мин после этого вслед за ним со скоростью на 10 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

148. От пристани A к пристани B, расстояние между которыми 180 км по морю, отправился катер. Через 8 часов после этого следом за ним отправился второй катер со скоростью на 6 км/ч большей. Найдите скорость второго катера, если в пункт B он прибыл одновременно с первым катером. Ответ дайте в км/ч.

149. Рыбнадзорный катер патрулирует участок реки длиной 180 км. Против течения реки он проплывает этот участок за время, на 1 час большее, чем по течению реки. Определите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

150. Весной катер идёт против течения реки в 2 раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 2 км/ч медленнее. Поэтому катер летом идёт против течения в $1\frac{2}{5}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите собственную скорость катера (в км/ч).

151. Моторная лодка в 9:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 13:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки равна 12 км/ч.

152. Моторная лодка в 4:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 126 км от A. Пробыв в пункте B 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 22:00. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

153. Экипаж дальнобойщиков проехал из города на побережье расстояние 6800 км с некоторой постоянной скоростью и без остановок. На обратном пути он увеличил скорость на 5 км/ч, что позволило ему сделать остановку длительностью 5 часов и тем не менее затратить столько же времени, сколько он ехал из города на побережье. Найдите скорость при движении без остановок. Ответ дайте в км/ч.

154. Путь в $158\frac{2}{3}$ км велосипедист преодолевает на 2 часа быстрее, чем пешеход. Какова скорость велосипедиста, если известно, что он в час проезжает на 3 км больше, чем проходит пешеход? Ответ укажите в км/ч.

155. Экскурсионный теплоход регулярно перемещается из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 570 км. Теплоход отправился с постоянной скоростью из пункта A в пункт B. После прибытия он отправился обратно со скоростью на 8 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на отдых на 4 часа. В результате теплоход затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от пункта A до пункта B. Найдите скорость теплохода на пути из пункта A в пункт B. Ответ дайте в км/ч.

156. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 75 км/ч, проезжает мимо платформы, длина которой равна 150 м, за 24 с. Найдите длину поезда в метрах.

157. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 70 км/ч, проходит мимо неподвижно стоящего на платформе человека за 1 минуту 12 секунд. Определите длину поезда в метрах.

158. Электропоезд-экспресс, двигаясь равномерно со скоростью 180 км/ч, проезжает мимо семафора за 4 с. Найдите длину экспресса (в метрах).

159. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых соответственно равны 85 км/ч и 45 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он проходит мимо товарного поезда, равно 1,2 минутам. Ответ дайте в метрах.

160. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующий час — со скоростью 110 км/ч, а затем два часа — со скоростью 85 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

161. Первые четыре часа автомобиль ехал со скоростью 65 км/ч, следующие два часа — со скоростью 90 км/ч, а затем два часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

162. Автомобиль ехал 1,5 часа со скоростью 40 км/ч, 2,5 часа — со скоростью 60 км/ч, оставшуюся часть пути — со скоростью 75 км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля, если всего он потратил 5 часов. Ответ укажите в км/ч.

5.2. Работа, производительность

163. На сбор 2400 бонусов первый геймер тратит времени на 20 минут меньше, чем второй. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает в минуту на 20 бонусов больше?

164. Оля и Дима читают одну и ту же книгу. Оля читает за час 50 страниц, а Дима только 30. Дети начали читать книгу одновременно и не прерывались, при этом Оля закончила читать на 36 минут раньше. Сколько страниц текста содержит книга?

165. Галя и Люда выполняют работу по параллельному набору одного и того же текста. За один час Галя набирает 12 страниц текста, а Люда — 15. Они начали работать одновременно, и Галя закончила работу на 45 минут позже Люды. Найдите, сколько страниц содержала работа.

166. Бак летнего душа объёмом 600 литров можно заполнить одним из двух насосов. Первый закачивает на 5 литров в минуту больше, чем второй, и поэтому на заполнение всего бака тратит на 6 минут меньше второго насоса. Определите, сколько литров в минуту закачивает второй насос.

167. Первая труба пропускает на 15 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 300 литров она заполнит на 18 минут быстрее, чем первая труба?

168. В помощь садовому насосу, перекачивающему 6 литров воды за 4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объём воды за 2 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 27 литров воды?

169. Вторая труба пропускает в минуту на 6 л воды меньше, чем первая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 140 л она заполнит на 5 минут быстрее, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 100 л?

170. Винни Пух и Пятачок могут полить огород за 35 минут. Пятачок и Кролик могут вместе полить этот же огород за 63 минуты. Кролик и Винни Пух вместе поливают огород за 45 минут. За сколько минут польют огород Винни Пух, Пятачок и Кролик, работая вместе?

171. Ремонт одной и той же квартиры Виктор и Алексей делают за 8 дней, как и Андрей вместе с Виктором, при этом Алексей с Андреем могут выполнить этот ремонт за 12 дней. Сколько дней будет длиться ремонт, если все 3 мастера будут работать одновременно?

172. Один токарь может выполнить заказ за 12 часов, второй — за 15 часов, а третий — за 20 часов. За сколько часов три токаря выполнят заказ, работая совместно?

173. Каменщики Антон и Пётр выкладывают один кирпичный забор за 8 часов, Пётр и Дмитрий выполняют эту же работу за 12 часов, а Антон и Дмитрий — за 9,6 часа. Найдите, за сколько часов каменщики выполнят эту работу, если будут работать втроём.

5.3. Проценты, сплавы, смеси

174. В ёмкость, содержащую 12 кг 8%-ного раствора вещества, добавили 4 кг воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

175. Инжир содержит 70% воды, а сушёный инжир — 3,4%. Сколько килограммов инжира потребуется для получения 10 кг сушёного инжира?

176. Смешали 2 кг 15%-ного водного раствора некоторого вещества с 8 кг 10%-ного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

177. Смешали некоторое количество 31%-ного раствора с таким же количеством 23%-ного раствора. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

178. Имеется два сосуда. Первый содержит 75 кг, а второй — 50 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 42% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

179. В результате смешивания 25%-ного и 15%-ного растворов серной кислоты получили 750 г 20%-ного раствора. Сколько граммов 15%-ного раствора было взято?

180. Смешав 25%-ный и 75%-ный раствор кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 50%-ный раствор той же кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 5 кг 15%-ного раствора, то получили бы 55%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 75%-ного раствора использовали для получения смеси?

181. Первый сплав содержит 15% железа, а второй — 30%. Масса первого сплава на 2 кг меньше массы второго сплава. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 25% железа. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

182. Семья состоит из мужа, жены и их сына-студента. Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 37,5%. Если бы зарплата мужа уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 39%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет стипендия сына?

183. В понедельник акции компании подешевели на некоторое число процентов, а во вторник подорожали на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подешевели акции компании в понедельник?

184. Бизнесмен Яблоков получил в 2009 году прибыль в размере 100 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 150% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Яблоков за 2012 год?

Задания для контроля

Вариант 1

1. Двое байкеров выехали одновременно из одного города в другой. Первый проехал весь путь со скоростью 96 км/ч. Второй проехал первую половину пути со скоростью 80 км/ч. С какой скоростью пришлось ехать второму байкеру вторую половину пути, если в другой город они приехали одновременно? Ответ дайте в км/ч.

2. Катер проплыл по течению реки от пристани A до пристани B расстояние в 437 км. Против течения реки он проплыл то же самое расстояние на 4 часа дольше, чем по течению. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3. Катя и Таня вместе могут вымыть окно за 15 минут. Таня и Настя могут вымыть это же окно за 21 минуту. Настя и Катя вымоют это окно за 35 минут. За сколько минут могут вымыть окно Катя, Таня и Настя, если будут мыть его вместе?

4. Бассейн объёмом 18 000 л первый насос наполняет на 10 минут медленнее, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает в минуту на 300 л больше?

5. Смешали 5 л 27%-ного водного раствора некоторого вещества с 8 л 40%-ного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Вариант 2

1. Экипаж дальнобойщиков проехал расстояние 6375 км с определённой скоростью без остановок. На обратном пути водители планируют сделать остановку на 10 часов для отдыха. Для этого на обратном пути им необходимо увеличить скорость на 10 км/ч по сравнению с прямым маршрутом. Найдите (в км/ч) значение первоначальной скорости, если на пути в обоих направлениях затрачено одинаковое количество времени.

2. Малыш и Карлсон вместе съедают торт за 20 минут. Карлсон и Фрекен Бок съедают вместе этот же торт за 30 минут. Фрекен Бок и Малыш съедают этот же торт за 24 минуты. За сколько минут съедят этот торт Малыш, Карлсон и Фрекен Бок, если будут есть его все вместе?

3. Бак летнего душа объёмом 800 л первый насос заполняет на 24 минуты медленнее, чем второй насос. Сколько литров в минуту закачивает первый насос, если второй закачивает на 30 л в минуту больше?

4. Первые три часа волк бежал со скоростью 20 км/ч, следующий час — со скоростью 45 км/ч, а затем два часа — со скоростью 15 км/ч. Найдите среднюю скорость волка на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 54 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Вариант 3

1. На сбор 3000 бонусов первый геймер тратит времени на 50 минут меньше, чем второй на сбор 5500 бонусов. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 5 бонусов в минуту больше?

2. Скорость катера береговой охраны в стоячей воде равна 20 км/ч. Путь длиной 396 км по течению реки он проплывает на 4 ч быстрее, чем против течения реки. Найдите скорость течения реки (в км/ч).

3. Сестра вышла из дома на 1 мин 40 с раньше брата. Тем не менее в школу, находящуюся на расстоянии 300 м от дома, они пришли одновременно. Определите время движения сестры (в мин), если скорость брата на 0,5 м/с больше скорости сестры.

4. Первый рабочий изготавливает 200 деталей за 10 минут. Вместе со вторым рабочим они изготавливают 760 деталей за столько же минут, за сколько второй, работая один, изготавливает 360 деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает второй рабочий?

5. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 8800 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 968 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Вариант 4

1. На сбор 4000 бонусов первый геймер тратит времени столько же, сколько второй на сбор 3600 бонусов. Сколько бонусов в минуту собирает второй геймер, если первый собирает на 4 бонуса в минуту больше?

2. Катер береговой охраны патрулирует участок реки длиной 396 км. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите скорость катера в стоячей воде (в км/ч), если против течения катер проплывает патрулируемый участок на 4 часа медленнее, чем по течению.

3. Расстояние от дома до школы, равное 480 м, брат проходит на 2 мин 40 с быстрее, чем сестра. Определите скорость брата (в м/с), если скорость сестры на 0,5 м/с меньше, чем скорость брата.

4. Первый и второй рабочий, работая вместе, изготавливают 38 деталей в минуту. 200 таких же деталей первый рабочий изготавливает за то же время, за которое второй изготавливает 180 таких же деталей. Сколько деталей в минуту изготавливает первый рабочий самостоятельно?

5. Имеется два сплава. Первый содержит 15% золота, второй — 2% золота. Масса первого сплава 3 кг, масса второго — 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав. Найдите процентное содержание золота в полученном сплаве.

§ 6. Теория вероятностей

6.1. Классическое определение вероятности

Пусть при проведении испытания (бросание монеты или кубика, вытягивание экзаменационного билета и т. д.) возможны n равновозможных исходов. Например, при подбрасывании монеты число всех исходов n равно 2, так как кроме выпадения решки или орла других исходов быть не может. При броске игрального кубика возможны 6 исходов, так как на верхней грани кубика равновозможно появление любого из чисел от 1 до 6. Пусть также некоторому событию A благоприятствуют m исходов.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов. Пишем $P(A) = \frac{m}{n}$.

Например, пусть событие A состоит в выпадении нечётного числа очков при бросании кубика. Всего возможны 6 исходов: выпадение на верхней грани кубика 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом благоприятными для события A являются исходы с выпадением 1, 3, 5. Таким образом, $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Заметим, что всегда выполняется двойное неравенство $0 \leqslant m \leqslant n$, поэтому вероятность любого события A лежит на отрезке $[0; 1]$, то есть $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

185. В чемпионате мира участвуют 24 команды. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по шесть команд в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется в третьей группе?

186. В чемпионате мира участвуют 24 команды, в том числе команда из России. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по шесть команд в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда из России окажется во второй группе?

187. Карточки с цифрами от 1 до 4 наудачу извлекают из мешка и кладут по порядку. Какова вероятность того, что карточку с цифрой 3 извлекут последней?

188. Пятеро друзей-автолюбителей взяли автомобиль в аренду для путешествия. С помощью жребия они выбирают двоих, которые в первый день будут поочерёдно водителями. Какова вероятность того, что М., входящий в состав группы, будет водителем в первый день путешествия?

189. В сборнике билетов по физике всего 30 билетов, в 6 из них встречается вопрос по механике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по механике.

190. В партии 1050 деталей, из них 630 — типа А, а остальные — типа Б. Какова вероятность того, что наудачу взятая деталь — типа Б?

191. На стоянке 56 автомобилей, из них в 42 есть кондиционер. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на стоянке автомобиле есть кондиционер.

$\boxed{\textbf{192.}}$ В урне 14 красных, 9 жёлтых и 7 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

193. На книжной полке Максима 25 книг: 12 детективов, 4 учебника по математике и 9 книг в жанре фэнтези. Найдите вероятность того, что наудачу взятая с этой полки книга окажется учебником по математике.

194. В классе 20 человек, из них четыре Светы и пять Дим. Директор вызвал наугад одного из учеников. Какова вероятность, что вызванного ученика зовут Света или Дима?

$\boxed{\textbf{195.}}$ Из 20 билетов, предлагаемых на экзамене, школьник может ответить только на 17. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить на выбранный наугад билет?

196. Из семидесяти пяти парашютов шесть неисправных. Какова вероятность того, что наудачу взятый парашют исправен?

197. В книге 400 страниц, из них на 36 есть картинки. Школьник открывает книгу на наугад выбранной странице. Какова вероятность того, что на открытой странице не будет картинки?

198. В доме сорок восемь квартир. В тридцати из них ранним утром среды никого не будет. Пришедший в это время почтальон наберёт в домофон наудачу номер одной из квартир. Какова вероятность того, что ему ответят?

199. В сборнике билетов по истории всего 20 билетов, в 7 из них встречается вопрос по XVII веку. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по XVII веку.

200. В чемпионате по художественной гимнастике участвуют 20 спортсменок: 6 из России, 5 из Германии, остальные — из Франции. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая седьмой, окажется из Франции.

201. На чемпионате мира по фигурному катанию участвуют 75 спортсменов, среди них 12 — из России, 8 — из Китая. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что 13-м будет выступать спортсмен из России.

202. В соревнованиях по метанию копья участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Дании, 11 спортсменов из Швеции и 9 из Греции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Дании.

203. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 50 докладов — первые три дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

204. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 50 докладов — первые три дня по 14 докладов, остальные в четвёртый день. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

205. На экзамене участников рассаживают по семи аудиториям. В первых шести по 15 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию на другом этаже. При подсчёте выяснилось, что всего было 100 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал экзаменационную работу в запасной аудитории.

206. Из 1000 собранных на заводе кофемолок 7 штук бракованных. Эксперт проверяет одну наугад выбранную кофемолку из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемая кофемолка окажется бракованной.

207. Завод производит холодильники. В среднем на 100 качественных холодильников приходится 15 холодильников со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный холодильник окажется качественным. Результат округлите до сотых.

208. Фабрика выпускает рюкзаки. В среднем на 100 качественных рюкзаков приходится восемнадцать рюкзаков со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный рюкзак окажется качественным. Результат округлите до сотых.

209. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 16 теннисистов, среди которых 7 участников из России, в том числе Максим Зайцев. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Зайцев будет играть с каким-либо теннисистом из России.

210. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 шахматистов, среди которых 19 участников из России, в том числе Максим Петров. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Петров будет играть с каким-либо шахматистом из России.

211. Перед началом первого тура чемпионата по фехтованию участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате соревнуются 36 спортсменов, среди которых 8 участников из России, в том числе Василий Петров. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Петров будет фехтовать с каким-либо спортсменом из России.

212. Футбольную секцию посещают 33 человека, среди них два брата — Антон и Дмитрий. Посещающих секцию случайным образом делят на три команды по 11 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Антон и Дмитрий окажутся в одной команде.

213. Спортивную секцию посещают 16 человек, среди них два брата — Антон и Дмитрий. Посещающих секцию случайным образом делят на четыре команды по 4 человека в каждой. Найдите вероятность того, что Антон и Дмитрий окажутся в одной команде.

214. В группе 51 человек, среди них две сестры — Маша и Даша. Группу случайным образом делят на три звена по 17 человек в каждом. Найдите вероятность того, что Маша и Даша окажутся в одном звене.

215. Симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

216. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно 1 раз.

217. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет орёл, во второй и третий — решка.

218. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет все четыре раза.

219. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «сумма очков равна 8»?

220. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «A = сумма очков равна 6»?

221. Юра дважды бросал кубик. Найдите вероятность того, что при втором броске у него выпало столько же очков, сколько и при первом. Ответ округлите до сотых.

222. Одновременно бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

223. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет не менее 11 очков. Ответ округлите до сотых.

224. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 12 очков. Ответ округлите до сотых.

225. Кубик бросают дважды. В сумме за эти 2 броска выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало более 2 очков.

6.2. Основные теоремы теории вероятностей

События A и B называются **противоположными** друг другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них. Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. Из определения противоположных событий следует

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$, значит, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Два события A и B называют **несовместными**, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A, так и событию B.

Пусть событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B. Тогда C называют **объединением событий** A и B, пишут $C = A \cup B$. Также объединение событий иногда называют **суммой событий** и обозначают $A + B$.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Два события A и B называют **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Пусть событие C означает, что произошло как событие A, так и B. Тогда C называют **пересечением событий** A и B, пишут $C = A \cap B$. Также пересечение событий иногда называют **произведением событий** и обозначают $A \cdot B$.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Частотой события A называют отношение $\frac{m}{n}$, где n — общее число испытаний, m — число появлений события A. Например, пусть мы подбросили монету 100 раз, орёл выпал 47 раз. Тогда частота выпадения орла в нашем эксперименте равна $\frac{47}{100} = 0{,}47$.

В общем случае вероятности пересечения и объединения событий A и B связаны следующими формулами:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

$\boxed{226.}$ Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Н. с вероятностью 0,45. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Н. с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А. и Н. играют две шахматные партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

227. Если футбольная команда А играет на домашнем стадионе, то она выигрывает у футбольной команды Б с вероятностью 0,4. Если команда А играет в гостях (на домашнем стадионе команды Б), то команда А выигрывает у команды Б с вероятностью 0,3. Команды А и Б играют два матча, по одному разу на домашнем стадионе каждой из них. Найдите вероятность того, что команда А выиграет оба матча.

$\boxed{228.}$ По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,85. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,96. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

229. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,1. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

230. Рядом находятся два автомата для продажи кофе. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,2 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один из этих автоматов исправен.

231. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые два раза попал в мишени, а последние три — промахнулся. Результат округлите до сотых.

232. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые четыре раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

233. Ракета поражает цель с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что цель не окажется поражённой после 4 запусков ракеты?

234. Алексей подкидывает монетку до тех пор, пока не выпадет решка. Какова вероятность того, что он сделает ровно 4 подбрасывания?

235. На рисунке 47 изображён лабиринт. Мышка заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад мышка не может, поэтому на каждом разветвлении мышка выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью мышка придёт к выходу В.

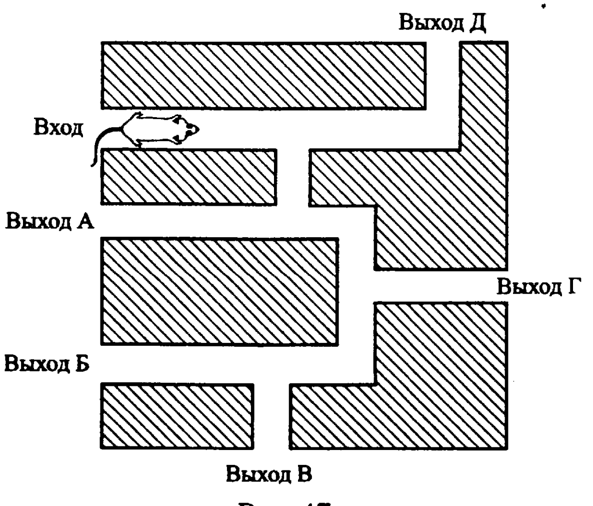


Рис. 47.

236. На рисунке 48 изображён лабиринт. Крыса заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и идти назад крыса не может, поэтому на каждом разветвлении крыса выбирает один из путей, по которому ещё не шла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью крыса придёт к выходу А.

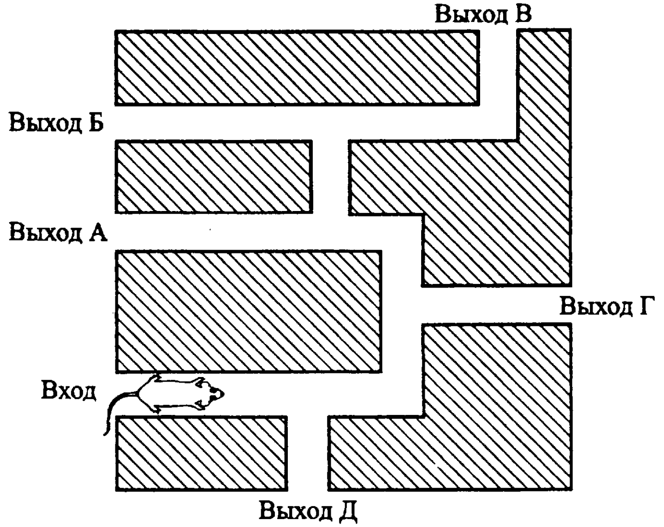


Рис. 48.

237. Иван Петрович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наугад выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке 49. Найдите вероятность того, что Иван Петрович попадёт в точку E.

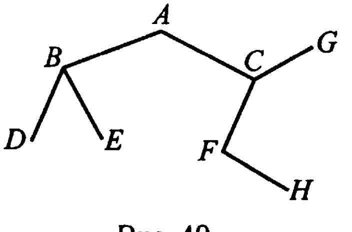


Рис. 49.

238. В классе 16 мальчиков и 9 девочек. Для подготовки классной комнаты к занятиям случайным образом выбирают двух дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить будут два мальчика.

239. В классе 9 мальчиков и 16 девочек. Среди учащихся класса случайным образом выбирают двоих дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить будут две девочки.

240. Вероятность того, что новая кофемолка прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что она прослужит больше двух лет, равна 0,81. Найдите вероятность того, что кофемолка прослужит меньше двух лет, но больше года.

241. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в среду в автобусе окажется меньше 40 пассажиров, равна 0,89. Вероятность того, что окажется меньше 28 пассажиров, равна 0,37. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 28 до 39.

242. Вероятность того, что новый мобильный телефон прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,78. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

243. Ковбой Билл попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Билл стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,25. На столе лежит 5 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Билл видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Билл попадёт в муху.

244. Ковбой Джо попадает в муху на стене с вероятностью 0,72, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джо стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,16. На столе лежит 12 револьверов, из них только 3 — пристрелянные. Ковбой Джо видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джо промахнётся.

245. Васе нужно забить в стенку гвоздь. Если гвоздь стальной, то он согнётся с вероятностью 0,1, а если гвоздь железный, то он согнётся с вероятностью 0,3. На столе лежат 6 стальных и 4 железных гвоздя. Петя берёт первый попавшийся гвоздь со стола и пытается забить его в стенку. Найдите вероятность того, что этот гвоздь согнётся.

246. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

247. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

248. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, шахматисту нужно набрать хотя бы 1,5 очка по итогам двух игр. Если шахматист выигрывает, он получает 1 очко, в случае ничьей — 0,5 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что шахматисту удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятность выигрыша и проигрыша одинакова и равна 0,3.

249. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,22. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

250. В торговом центре два одинаковых автомата продают шоколадки. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончатся шоколадки, равна 0,4. Вероятность того, что шоколадки закончатся в обоих автоматах, равна 0,35. Найдите вероятность того, что к концу дня шоколадки останутся в обоих автоматах.

251. На втором и третьем этажах в корпусе механико-математического факультета университета для студентов работают две одинаковые ксерокопировальные машины. Вероятность того, что к концу дня в ксерокопировальной машине закончится бумага, равна 0,4. Вероятность того, что бумага закончится в обоих ксерокопировальных машинах, равна 0,23. Найдите вероятность того, что к концу дня бумага останется в обоих ксерокопировальных машинах.

252. Чтобы поступить в институт на специальность «архитектура», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и истории. Чтобы поступить на специальность «живопись», нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — русскому языку, истории и литературе.

Вероятность того, что абитуриент Н. получит не менее 60 баллов по истории, равна 0,8, по русскому языку — 0,5, по литературе — 0,6 и по математике — 0,9.

Найдите вероятность того, что Н. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

253. Чтобы поступить в институт на специальность «архитектура», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 75 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и истории. Чтобы поступить на специальность «телевидение», нужно набрать не менее 75 баллов по каждому из трёх предметов — русскому языку, литературе и истории. Вероятность того, что абитуриент К. получит не менее 75 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,8, по истории — 0,5 и по литературе — 0,7. Найдите вероятность того, что К. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

254. Чтобы поступить в институт на специальность «туризм», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 55 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и обществознанию. Чтобы поступить на специальность «механизмы», нужно набрать не менее 55 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и физике. Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 55 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку — 0,7, по физике — 0,4 и по обществознанию — 0,6. Найдите вероятность того, что А. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Задания для контроля

Вариант 1

1. В некоторой школе 500 учащихся, среди них 257 мальчиков. Найдите вероятность того, что выбранный наугад учащийся этой школы окажется девочкой.

2. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет орёл, во второй — решка.

3. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,08 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

4. Вероятность того, что новый мобильный телефон прослужит больше двух лет, равна 0,62. Вероятность того, что он прослужит больше пяти лет, равна 0,43. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше пяти лет, но больше двух.

5. Чтобы поступить в институт на специальность «автоматизация», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и физике. Чтобы поступить на специальность «мехатроника», нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и информатике. Вероятность того, что абитуриент У. получит не менее 60 баллов по математике, равна 0,4, по русскому языку — 0,5, по физике — 0,3 и по информатике — 0,2. Найдите вероятность того, что У. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Вариант 2

1. В сборнике заданий по математике всего 280 заданий, в 21 из них встречается вопрос по процентам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на уроке задании школьнику не достанется вопроса по процентам.

2. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 13 участников из России, в том числе Роман Исаев. Найдите вероятность того, что в первом туре Роман Исаев будет играть с каким-либо теннисистом из России.

3. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 19 пассажиров, равна 0,26. Вероятность того, что окажется меньше 6 пассажиров, равна 0,009. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 6 до 18.

4. На рисунке 50 изображён лабиринт. Жук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад жук не может, поэтому на каждом разветвлении жук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью жук придёт к выходу Е.

5. Чтобы поступить в институт на специальность «биотехника», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 80 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и химии. Чтобы поступить на специальность «управление», нужно набрать не менее 80 баллов по каждому из трёх предметов — математике, русскому языку и обществозна-

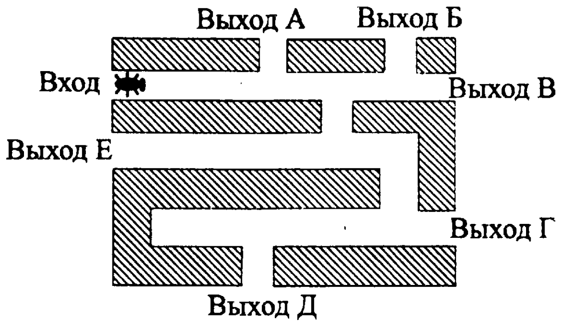


Рис. 50.

нию. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 80 баллов по математике, равна 0,3, по русскому языку — 0,4, по химии — 0,7 и по обществознанию — 0,6. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

Вариант 3

1. Маша, Даша, Света, Оля и Наташа бросили жребий — кому первой петь песню. Найдите вероятность того, что первой петь песню будет не Маша.

2. Перед началом волейбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру. Команда «Тигры» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх команда «Тигры» выиграет жребий ровно два раза.

3. Вероятность того, что новый фен прослужит больше трёх лет, равна 0,71. Вероятность того, что он прослужит больше десяти лет, равна 0,24. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше десяти лет, но больше трёх.

4. Профессиональный игрок в шашки А., играя белыми, выигрывает у профессионального игрока Б. с вероятностью 0,42. Если же он играет чёрными, то выигрывает с вероятностью 0,2. А. и Б. играют две партии, меняя при этом цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет обе партии.

5. В торговом центре два одинаковых автомата продают шоколадки. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится шоколад, равна 0,8. Вероятность того, что шоколад закончится в обоих автоматах, равна 0,62. Найдите вероятность того, что к концу дня шоколад останется в обоих автоматах.

Вариант 4

1. На полке лежит 180 тетрадей, из них 63 в линейку, а остальные — в клетку. Найдите вероятность того, что случайно выбранная тетрадь будет в клетку.

2. Перед началом партии в шашки Вася бросает монетку, чтобы определить, кто из игроков начнёт игру. Вася играет четыре партии с разными игроками. Найдите вероятность того, что в этих партиях Вася выиграет жребий ровно один раз.

3. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 43 пассажиров, равна 0,91. Вероятность того, что окажется меньше 16 пассажиров, равна 0,12. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 16 до 42.

4. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,85, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,34. На столе лежит 17 револьверов, из них только 7 — пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

5. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,7. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,56. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

§ 7. Нахождение величины из формулы

Вспомним равносильные преобразования.

1. При переносе слагаемого из одной части уравнения в другую его знак меняется на противоположный.

2. Обе части уравнения можно умножить (или разделить) на одно и то же ненулевое число.

Также важно понимать, что многие физические и экономические величины по своей природе всегда неотрицательны (или даже строго положительны).

255. Кинетическая энергия тела (в джоулях) вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса тела (в килограммах), а v — его скорость (в м/с). Пользуясь этой формулой, найдите E (в джоулях), если $v = 6$ м/с, $m = 15$ кг.

256. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2R$, где I — сила тока в амперах, R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите P (в ваттах), если $R = 8$ Ом и $I = 4{,}5$ А.

257. Объём прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле $V = abc$, где a, b и c — длины трёх его рёбер, выходящих из одной вершины. Пользуясь этой формулой, найдите a (в метрах), если $V = 60$, $b = 2{,}5$, $c = 6$.

258. Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, где a — сторона, а α — противолежащий ей угол треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите R, если $a = 4$ и $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

259. Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, где a — сторона, α — противолежащий ей угол треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите a, если $R = 16$ и $\sin\alpha = \dfrac{3}{8}$.

260. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, где b и c — две стороны треугольника, а α — угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, если $b = 15$, $c = 8$, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

261. Площадь треугольника со сторонами a, b, c можно найти по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$. Найдите площадь треугольника, если длины его сторон равны 5, 12, 13.

262. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности вычисляется по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, а c — гипотенуза. Пользуясь этой формулой, найдите c, если $a = 8$, $b = 15$, $r = 3$.

263. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b и c вычисляется по формуле $S = 2ab+2ac+2bc$. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его рёбра имеют длину 1, 2 и 5.

264. Среднее гармоническое трёх чисел a, b и c вычисляется по формуле $h = \left(\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)$.

Найдите среднее гармоническое чисел $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$.

265. Длина медианы m_c, проведённой к стороне c треугольника со сторонами a, b и c, вычисляется по формуле $m_c = \frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$. Найдите медиану m_c, если $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{15}$.

266. Если p_1, p_2 и p_3 — различные простые числа, то сумма всех делителей числа $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ равна $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)$. Найдите сумму всех делителей числа $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$.

267. Второй закон Ньютона можно записать в виде $f = ma$, где f — сила (в ньютонах), действующая на тело, m — его масса (в килограммах), a — ускорение, с которым движется тело (в м/с^2). Найдите m (в килограммах), если $f = 222$ (Н) и $a = 37$ (м/с^2).

268. В фирме «Сквозь пробки» стоимость поездки на такси длительностью меньше 5 минут составляет 120 рублей. Если поездка длится 5 минут или более, то её стоимость (в рублях) рассчитывается по формуле $C = 120 + 9(t-5)$, где t — длительность поездки, выраженная в минутах ($t \geqslant 5$). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 25-минутной поездки. Ответ дайте в рублях.

269. Зная длину своего шага, человек может приближённо подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s = nl$, где n — число шагов, l — длина шага. Какое расстояние прошёл человек, если $l = 55$ см, $n = 2000$. Ответ дайте в метрах.

270. Закон Гука можно записать в виде $f = kx$, где f — сила (в ньютонах), с которой сжимают пружину, x — абсолютное удлинение (сжатие) пружины (в метрах), а k — коэффициент упругости. Пользуясь этой формулой, найдите x (в метрах), если $f = 42$ Н и $k = 6\frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

271. Сумма углов правильного выпуклого многоугольника вычисляется по формуле $\Sigma = (n-2)\pi$, где n — количество его углов. Пользуясь этой формулой, найдите n, если $\Sigma = 15\pi$.

272. Теорему синусов можно записать в виде $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, где a и b — две стороны треугольника, α и β — углы треугольника, лежащие против них, соответственно. Пользуясь этой формулой, найдите a, если $b = 8$, $\sin\alpha = \frac{1}{6}$ и $\sin\beta = \frac{1}{3}$.

273. Теорему синусов можно записать в виде $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, где a и b — две стороны треугольника, α и β — углы треугольника, лежащие против них, соответственно. Пользуясь этой формулой, найдите величину $\sin\alpha$, если $a = 17$, $b = 5$, $\sin\beta = \frac{1}{34}$.

274. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, если $d_1 = 6$, $d_2 = 11$, $\sin\alpha = \frac{3}{11}$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = \frac{U^2 t}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление (в омах), t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в джоулях), если $t = 7$ с, $U = 5$ В и $R = 5$ Ом.

2. Среднее геометрическое трёх чисел a, b и c вычисляется по формуле $g = \sqrt[3]{abc}$. Вычислите среднее геометрическое чисел 9, 15, 25.

3. Длина биссектрисы l_c, проведённой к стороне c треугольника со сторонами a, b и c, вычисляется по формуле $l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)}$. Найдите биссектрису l_c, если $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{19}$.

4. Площадь четырёхугольника можно выразить по формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_1, если $d_2 = 14$, $\sin\alpha = \frac{4}{7}$, $S = 50$.

5. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, где b и c — две стороны треугольника, а α — угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите величину $\sin\alpha$, если $b = 12$, $c = 20$ и $S = 15$.

Вариант 2

1. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = I^2 Rt$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах), t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в Джоулях), если $t = 4$ с, $I = 5$ А и $R = 3$ Ом.

2. Чтобы перевести температуру из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F = 1{,}8t_C + 32$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -2 градуса по шкале Цельсия?

3. Количество теплоты (в джоулях), полученное однородным телом при нагревании, вычисляется по формуле $Q = cm(t_2 - t_1)$, где c — удельная

теплоёмкость (в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$), m — масса тела (в кг), t_1 — начальная температура (в кельвинах), а t_2 — конечная температура тела (в кельвинах). Пользуясь этой формулой, найдите Q (в джоулях), если $t_2 = 600$ К, $c = 300\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, $m = 1{,}5$ кг и $t_1 = 590$ К.

4. Потенциальная энергия тела (в джоулях) в поле тяготения Земли вблизи поверхности вычисляется по формуле $E = mgh$, где m — масса тела в килограммах, g — гравитационная постоянная, а h — высота (в метрах), на которой находится тело относительно условного нуля. Пользуясь этой формулой, найдите m (в килограммах), если $g = 9{,}8\text{м/с}^2$, $h = 5$ м, а $E = 196$.

5. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b и c — стороны треугольника, а R — радиус окружности, описанной около этого треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите b, если $a = 11$, $c = 14$, $S = 847$, $R = 1$.

Вариант 3

1. В фирме «Гвидон» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 5000+3200n$, где n — число колец, установленных при копании колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из шести колец. Ответ укажите в рублях.

2. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, где b и c — стороны треугольника, а α — угол между ними. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, если $b = 15$, $c = 8$, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

3. Теорему косинусов можно записать в виде $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, где a, b и c — стороны треугольника, а γ — угол между сторонами a и b. Пользуясь этой формулой, найдите величину $\cos\gamma$, если $a = 4$, $b = 7$, $c = 10$.

4. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{(a+b+c)r}{2}$, где a, b и c — стороны треугольника, а r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник. Пользуясь указанной формулой, найдите b, если $a = 8$, $c = 11$, $r = \sqrt{3}$, $S = 20\sqrt{3}$.

5. Длина биссектрисы l_c, проведённой к стороне c треугольника со сторонами a, b и c, вычисляется по формуле $l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab((a+b)^2 - c^2)}$. Найдите биссектрису l_c, если $a = 6$, $b = 8$, $c = 7$.

Вариант 4

1. Ускорение тела (в $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$) при равномерном движении по окружности можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$, где w — угловая скорость вращения (в с^{-1}), а R — радиус окружности в метрах. Пользуясь этой формулой, найдите a (в м/с^2), если $R = 5$ м, $w = 9\ \text{с}^{-1}$.

2. Перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 140 градусов по шкале Фаренгейта?

3. Среднее квадратичное трёх чисел a, b и c вычисляется по формуле $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$. Найдите по этой формуле среднее квадратичное чисел $2, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{7}$.

4. Площадь четырёхугольника можно выразить по формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_1, если $d_2 = 80$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $S = 96$.

5. Теорему косинусов можно записать в виде $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, где a, b и c — стороны треугольника, а γ — угол между сторонами a и b. Пользуясь этой формулой, найдите величину $\cos\gamma$, если $a = 8$, $b = 5$, $c = \sqrt{69}$.

§ 8. Координатная прямая и числовые промежутки

Иногда числа обозначают на координатной прямой. В математике принято числовую прямую направлять слева направо. То число, которое правее, то и большее. Например, на рисунке 51 видно, что $b > a$.

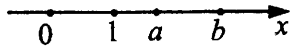


Рис. 51.

Нередко решение того или иного неравенства изображают на координатной прямой, штрихуя соответствующие промежутки. При этом обычно граничные значения изображают жирными точками, если они входят в промежуток, и «проколотыми» точками, если они не входят. Так, на рисунке 52 изображено множество $(\infty; 1) \cup [3; +\infty)$.

Рис. 52.

275. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 53). Какое из следующих чисел наибольшее?

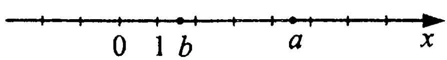


Рис. 53.

1) a 2) b 3) $3b$ 4) $a+2$

276. На координатной прямой отмечены точки M, N, K и L (см. рис. 54). Одна из них соответствует числу $\sqrt{500}$. Какая это точка?

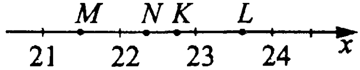


Рис. 54.

1) M 2) N 3) K 4) L

277. Про число s известно, что оно равно $\sqrt{11}$. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому это число принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА

А) $s^2 - 6$

Б) $\frac{\sqrt{s}}{s}$

В) $\sqrt{s}$

Г) $\frac{10}{s}$

ОТРЕЗКИ

1) [1; 2]

2) [5; 6]

3) [3; 4]

4) [0; 1]

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

278. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА

А) $\frac{14}{11}$

Б) $\log_2 9$

В) $\sqrt{17}$

Г) $0{,}42^{-1}$

ОТРЕЗКИ

1) [4; 5]

2) [2; 3]

3) [3; 4]

4) [1; 2]

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

279. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому это число принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками правого столбца.

ЧИСЛА

А) $\log_4 49$

Б) $\frac{19}{4}$

В) $\sqrt{11}$

Г) $(0{,}18)^{-1}$

ОТРЕЗКИ

1) [4; 5]

2) [5; 6]

3) [2; 3]

4) [3; 4]

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

280. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $16^x \geqslant 16$

Б) $\frac{1}{16^x} \geqslant 16$

В) $\log_{16} x \geqslant 1$

Г) $\log_{16} x \leqslant 1$

РЕШЕНИЯ

1) $[16;\ +\infty)$

2) $(-\infty;\ -1]$

3) $(0;\ 16]$

4) $[1;\ +\infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

281. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\frac{x-2}{x-5} \leqslant 0$

Б) $(x-2)(x-5) \leqslant 0$

В) $\log_3(x-2) \geqslant 0$

Г) $(x-2)^3(x-5) \geqslant 0$

РЕШЕНИЯ

1) $x \leqslant 2$ или $x \geqslant 5$

2) $x \geqslant 3$

3) $2 \leqslant x \leqslant 5$

4) $2 \leqslant x < 5$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

282. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $4^x \geqslant 4$

Б) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant 4$

В) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leqslant 4$

Г) $4^x \leqslant 4$

РЕШЕНИЯ

1) $(-\infty;\ -1]$

2) $[1;\ +\infty)$

3) $(-\infty;\ 1]$

4) $[-1;+\infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

283. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $(x-3)(x-4)<0$

Б) $\dfrac{x-3}{x-4}>0$

В) $(x-3)^2(x-4)<0$

Г) $\dfrac{(x-4)^2}{x-3}>0$

РЕШЕНИЯ

1) $x<3$ или $x>4$

2) $3<x<4$

3) $x<3$ или $3<x<4$

4) $3<x<4$ или $x>4$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

284. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $5^x \geqslant 5$

Б) $0{,}2^x \geqslant 5$

В) $0{,}2^x \leqslant 5$

Г) $5^x \leqslant 5$

РЕШЕНИЯ

1) $x \geqslant 1$

2) $x \leqslant 1$

3) $x \leqslant -1$

4) $x \geqslant -1$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

285. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $(x+5)(x-9)<0$

Б) $\dfrac{(x+5)^2}{x-9}<0$

В) $(x-9)^2(x+5)>0$

Г) $\dfrac{x+5}{x-9}>0$

РЕШЕНИЯ

1) $x \in (-\infty;\ -5) \cup (-5;\ 9)$

2) $(-\infty;\ -5) \cup (9;\ +\infty)$

3) $(-5;\ 9) \cup (9;\ +\infty)$

4) $(-5;\ 9)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

286. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

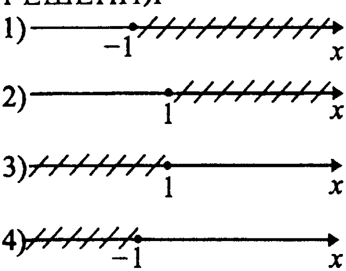
А) $3^x \geqslant 3$

Б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 3$

В) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 3$

Г) $3^x \leqslant 3$

РЕШЕНИЯ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

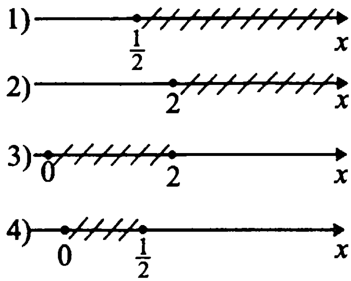
А	Б	В	Г

287. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\log_2 x \geqslant 1$
Б) $\log_2 x \leqslant -1$
В) $\log_2 x \geqslant -1$
Г) $\log_2 x \leqslant 1$

РЕШЕНИЯ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

288. На прямой отмечены числа m и n и точки A, B, C, D (см. рис. 55).

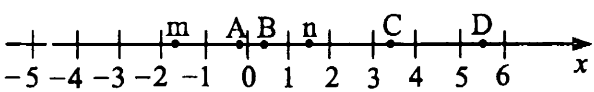


Рис. 55.

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ
A	1) $n + m$
B	2) $m^2 + n^2$
C	3) $\dfrac{3}{n} + m$
D	4) $n - m$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

289. На координатной прямой отмечены число m и точки A, B, C, D.

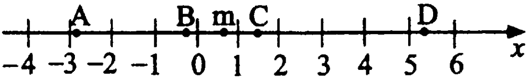


Рис. 56.

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $6 - m$
B	2) $m^2 + 1$
C	3) $m - 1$
D	4) $-\frac{2}{m}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

290. На координатной прямой отмечены точки A, B, C и D (см. рис. 57).

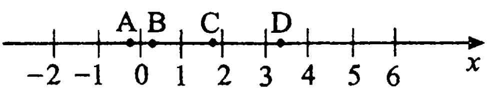


Рис. 57.

Число m равно 1,7. Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $1{,}4 - m$
B	2) $\frac{m+4}{20}$
C	3) $m^2 - 1$
D	4) $2m$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

291. На прямой отмечены точки A, B, C и D (см. рис. 58).

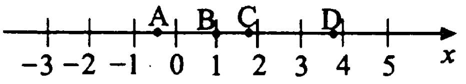


Рис. 58.

Число m равно $\sqrt{2}$. Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $1-m$
B	2) $\frac{m+4}{3}$
C	3) m^2-1
D	4) $2m+1$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

Задания для контроля

Вариант 1

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\log_7 x > 1$	1) $x > \frac{1}{7}$
Б) $\log_7 x < -1$	2) $0 < x < 7$
В) $\log_7 x > -1$	3) $0 < x < \frac{1}{7}$
Г) $\log_7 x < 1$	4) $x > 7$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

2. Каждому из четырёх неравенств в в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $x^2 - 5x - 36 \leqslant 0$

Б) $x^2 - 13x + 36 \geqslant 0$

В) $x^2 + 13x + 36 \geqslant 0$

Г) $x^2 + 5x - 36 \leqslant 0$

РЕШЕНИЯ

1) $(-\infty;\ 4] \cup [9\ \ +\infty)$

2) $[-4; 9]$

3) $[-9;\ 4]$

4) $(-\infty;\ -9] \cup [-4;\ +\infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

3. На прямой отмечены точки A, B, C и D.

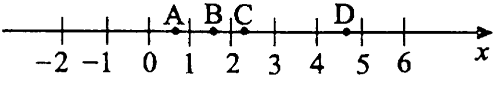


Рис. 59.

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ЧИСЛА

1) $\sqrt{2{,}8}$

2) $\left(\frac{4}{19}\right)^{-1}$

3) $\log_6 4$

4) $\frac{20}{9}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

4. На прямой отмечены числа m и n и точки A, B, C, D.

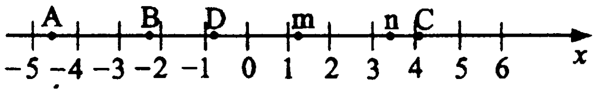


Рис. 60.

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) mn
B	2) $\frac{1}{n} - m$
C	3) $m - \frac{n^2}{2}$
D	4) $m - n$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

5. На координатной прямой точками отмечены числа a, b, c, d и m (см. рис. 61).

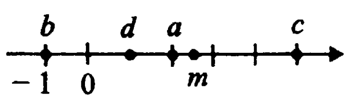


Рис. 61.

Установите соответствие между указанными точками и числами.

1) $2m$ 2) $0{,}4m$ 3) $m - \frac{1}{2}$ 4) $-0{,}4m$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

a	b	c	d

Вариант 2

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\log_9 x < 1$

Б) $\log_9 x < -1$

В) $\log_9 x > -1$

Г) $\log_9 x > 1$

РЕШЕНИЯ

1) $\left(\frac{1}{9};\ +\infty\right)$

2) $\left(0;\ 9\right)$

3) $\left(0;\ \frac{1}{9}\right)$

4) $(9;\ +\infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

2. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $x^2 - 5x - 14 \leqslant 0$

Б) $x^2 + 9x + 14 \geqslant 0$

В) $x^2 + 5x - 14 \geqslant 0$

Г) $x^2 - 9x + 14 \leqslant 0$

РЕШЕНИЯ

1) $x \leqslant -7$ или $x \geqslant 2$

2) $2 \leqslant x \leqslant 7$

3) $x \leqslant -7$ или $x \geqslant -2$

4) $-2 \leqslant x \leqslant 7$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

3. На прямой отмечены точки A, B, C и D (см. рис. 62).

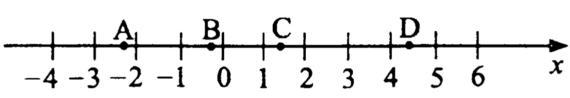


Рис. 62.

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$
B	2) $2\sqrt{2}-5$
C	3) $\sqrt{3}-2$
D	4) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

4. На прямой отмечены числа m и n (см. рис. 63).

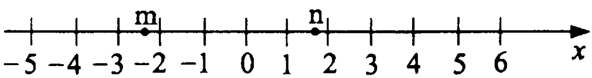


Рис. 63.

Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует один из отрезков в правом столбце, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками.

ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) m^2-n^2	1) $[-1;\ 0]$
Б) $n+m$	2) $[-2;\ -1]$
В) $n-m$	3) $[0;\ 3{,}5]$
Г) $-\frac{1}{m}-n$	4) $[3{,}5;\ 5]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

5. На координатной прямой точками отмечены числа a, b, c, d и n. Установите соответствие между указанными точками и числами (см. рис. 64).

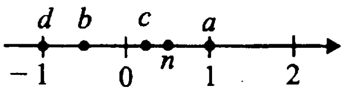


Рис. 64.

1) $n+\frac{1}{2}$ 2) $-2n$ 3) $-n$ 4) n^2

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

a	b	c	d

Вариант 3

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

ВЕЛИЧИНЫ

А) $\log_5 x > 0$

Б) $5^{-x} > 5$

В) $\dfrac{x^3}{x+1} < 0$

Г) $\dfrac{1}{x(x+1)^5} > 0$

РЕШЕНИЯ

1) $(-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$

2) $(-1;\ 0)$

3) $(-\infty;\ -1)$

4) $(1;\ \infty)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

2. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

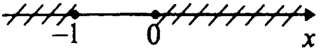
А) $\log_3 x > 0$

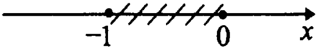
Б) $3^{-x} > 3$

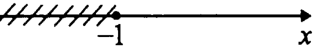
В) $\dfrac{x}{x+1} < 0$

Г) $\dfrac{1}{x(x+1)} > 0$

РЕШЕНИЯ

1) 

2) 

3) 

4) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

3. Про число k известно, что оно равно $\sqrt{7}$. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому это число принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками.

ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) $\sqrt{k}$	1) $[-1;\ 0]$
Б) $k^2 - 4$	2) $[2;\ 3]$
В) $-\frac{4}{k}$	3) $[-2;\ -1]$
Г) $-\frac{k}{10}$	4) $[1;\ 2]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

4. На прямой отмечены точки A, B, C и D (см. рис. 65).

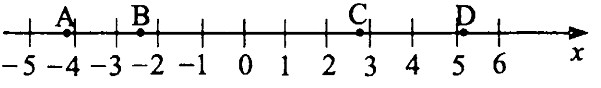


Рис. 65.

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{33}{2}$
B	2) $\frac{41}{8}$
C	3) $-\sqrt{6{,}1}$
D	4) $2^{1,5}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

5. На координатной прямой точками отмечены числа a, b, c, d и p. Установите соответствие между указанными точками и числами (см. рис. 66).

1) $-(p+1)$ 2) $\frac{1}{2}p$ 3) p^2 4) $3p$

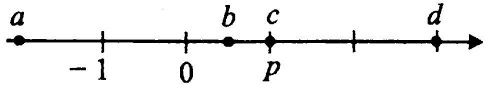


Рис. 66.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

a	b	c	d

Вариант 4

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\log_5 x < 2$

Б) $5^{-x} > 25$

В) $\dfrac{x}{x+2} > 0$

Г) $\dfrac{1}{x(x+2)^2} < 0$

РЕШЕНИЯ

1) $x < -2$ или $x > 0$

2) $0 < x < 25$

3) $x < -2$ и $-2 < x < 0$

4) $x < -2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

2. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

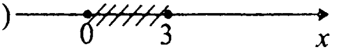
А) $2^{-x} \geqslant 8$

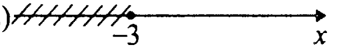
Б) $\dfrac{x}{x-3} \geqslant 0$

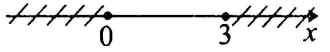
В) $\dfrac{1}{x(x-3)} < 0$

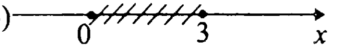
Г) $\log_3 x \leqslant 1$

РЕШЕНИЯ

1)


2)


3)


4)


В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

3. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА

А) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

Б) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

В) $\sqrt{6}+4\sqrt{3}$

Г) $(\sqrt{3})^3+2$

ОТРЕЗКИ

1) $[9;\ 10]$

2) $[4;\ 5]$

3) $[1;\ 2]$

4) $[7;\ 8]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

4. На прямой отмечены точки A, B, C и D (см. рис. 67).

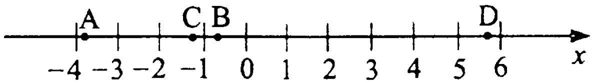


Рис. 67.

Каждой точке соответствует одно из чисел из правого столбца. Установите соответствие между указанными точками и числами.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$
B	2) $\sqrt{5}-2\sqrt{3}$
C	3) $-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$
D	4) $-\sqrt{5}-\sqrt{3}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

5. На координатной прямой точками отмечены числа a, b, c, d и l. Установите соответствие между указанными точками и числами (см. рис. 68).

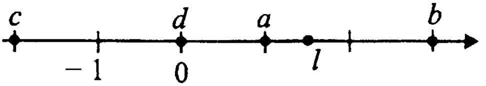


Рис. 68.

1) $0\cdot l$ 2) $2l$ 3) $2{,}5-l$ 4) $-l-0{,}5$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

a	b	c	d

§ 9. Уравнения

9.1. Линейные уравнения

Линейные уравнения — это уравнения вида $ax = b$, где неизвестным является x, а буквы a и b обозначают заданные числа.

Если $a = 0$, то либо уравнение не имеет корней (как, например, уравнение $0x = 7$), либо x может быть любым числом (если $0x = 0$). При $a \neq 0$ корень уравнения находят по формуле:

$$x = b : a.$$

292. Найдите корень уравнения $-5\frac{2}{3}x = 1\frac{5}{12}$.

293. Найдите корень уравнения $-\frac{3}{7}x = -\frac{45}{7}$.

294. Найдите корень уравнения $\frac{3}{22}x = 4\frac{4}{11}$.

295. Найдите корень уравнения $-\frac{3}{7}x = 3\frac{6}{7}$.

296. Найдите корень уравнения $\frac{x}{3} = 5\frac{1}{3}$.

9.2. Квадратные уравнения

Квадратные уравнения — это уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Основная формула для решения квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

297. Найдите корень уравнения $5x^2 + 7x - 6 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

298. Найдите корень уравнения $3x^2 - 7x - 10 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из них.

299. Найдите корень уравнения $x^2 - 5x - 14 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите меньший.

300. Решите уравнение $(3x + 1)^2 = (3x - 4)^2$.

301. Решите уравнение $(8x - 5)^2 = (8x + 5)^2$.

9.3. Рациональные уравнения

$\boxed{302.}$ Решите уравнение $\dfrac{2x-21}{x+12}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

303. Найдите корень уравнения $\dfrac{x-7}{x+3}=\dfrac{x-3}{x+9}$.

304. Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{2x+3}=-2$.

305. Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{2x-7}=\dfrac{1}{5x+8}$.

306. Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{4x-7}=\dfrac{1}{3}$.

307. Решите уравнение $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^3=-125$.

308. Найдите корень уравнения $(x+3)^3=-27$.

309. Найдите корень уравнения $-x=\dfrac{x+9}{-7x-3}$. Если уравнение имеет больше одного корня, то укажите больший из них.

310. Найдите корень уравнения $\dfrac{x-6}{2x-1}=\dfrac{1}{x+6}$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

9.4. Иррациональные уравнения

При решении иррациональных уравнений нам приходится возводить обе части уравнения в квадрат. Нужно помнить, что квадратный корень не может быть отрицательным. Если в уравнении квадратный корень равен выражению, которое может быть отрицательным, необходимо делать проверку. Например, в уравнении $\sqrt{2x+87}=-11$ корней нет.

$\boxed{311.}$ Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5x+39}{16}}=\dfrac{1}{2}$.

312. Найдите корень уравнения $\sqrt{5x+74}=8$.

313. Найдите корень уравнения $\sqrt{66-5x}=-x$.

314. Найдите корень уравнения $\sqrt{23-7x}=3$.

315. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{2x-8}{4}}=3$.

316. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{4}{5x-2}} = 1$.

317. Найдите корень уравнения $\sqrt{51-13x} = 5$.

318. Найдите корень уравнения $(\sqrt{5-x}-4)(\sqrt{7-x}-2) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, то укажите наибольший из них.

319. Найдите корень уравнения $(x+1{,}5)(\sqrt{x^2-4x-5}) = 0$. В ответе запишите корень уравнения или их сумму, если корней несколько.

9.5. Показательные уравнения

Самые простые показательные уравнения решают приведением обеих частей уравнения к одному основанию: $a^x = a^y$, откуда получают $x = y$.

При этом нужно помнить, что $a^{-k} = \dfrac{1}{a^k} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^k$,

обратно $a^k = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-k}$; $a^0 = 1$; $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$; $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

320. Найдите корень уравнения $5^{2x+4} = \dfrac{1}{25}$.

321. Найдите корень уравнения $4^{x-11} = \dfrac{1}{64}$.

322. Решите уравнение $2^{3+x} = 0{,}4 \cdot 5^{3+x}$.

323. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{12-4x} = 16$.

324. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x-13} = 125$.

325. Найдите корень уравнения $3^{5x-17} = \dfrac{1}{27}$.

326. Найдите корень уравнения $2^{14-2x} = \dfrac{1}{8}$.

327. Найдите корень уравнения $2^{5-x} = 4{,}5 \cdot 9^{5-x}$.

328. Найдите корень уравнения $11^{2-x} = 121$.

329. Найдите корень уравнения $216^{-x+4} = 6^x$.

330. Решите уравнение $2^{8-2x} = 2^{x^2}$. Если оно имеет несколько корней, то в ответе укажите меньший из них.

9.6. Логарифмические уравнения

По определению логарифма: $\log_a x = y$, если $x = a^y$. При таком способе решения проверка не нужна.

Помните! **Основание логарифма и основание степени при этом переходе совпадают!**

Самые простые логарифмические уравнения также решают приведением логарифмов в обеих частях уравнения к одному основанию: $\log_a x = \log_a y$, откуда $x = y$. В таких случаях при решении логарифмических уравнений нужно делать проверку, чтобы под знаком логарифма было только положительное число. При этом нужно помнить, что в выражении $\log_a x$ переменные $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, а также что $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^k = k$; $c \log_a b = \log_a b^c$.

331. Найдите корень уравнения $\log_2(x+8) = 5$.

332. Найдите корень уравнения $\log_5(x+7) = 2$.

333. Найдите корень уравнения $\log_2(4x-13) = 3$.

334. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) = -3$.

335. Найдите корень уравнения $\log_5(3x-9) = 2\log_5 6$.

336. Найдите корень уравнения $\log_5 91 = \log_5(2x-3)$.

337. Найдите корень уравнения $\log_6(x^2+7x) = \log_6(x^2+14)$.

338. Найдите корень уравнения $\log_4(x+4)^2 = \log_4(5x+20)$.

339. Найдите корень уравнения $\log_5(9x-7) = \frac{1}{2}\log_5 4$.

340. Найдите корень уравнения $\log_{15}(2x+11) = \log_{15} 4$.

341. Найдите корень уравнения $\log_{0,5}(5x-1) = \log_{0,5} 14$.

342. Найдите корень уравнения $\ln\frac{12}{x-4} = \ln(x+7)$. В ответе укажите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите корень уравнения $\log_7(21+x) = \log_7(2x+3)$.

2. Найдите корень уравнения $49^{x-8} = 7$.

3. Найдите корень уравнения $\sqrt{7x+15} = 8$.

4. Найдите корень уравнения $\frac{x+31}{x-3} = -4$.

5. Найдите корень уравнения $x^2 - 7x - 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $\log_3(7 - x) = 2\log_3 7$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{16}\right)^{5-2x} = 2$.

3. Найдите корень уравнения $\sqrt{54 + 3x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

4. Найдите корень уравнения $\frac{6}{7}x = 4\frac{2}{7}$.

5. Найдите корень уравнения $2x^2 + 11x + 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $\log_8(5 - x) = 3$.

2. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+5} = 27^x$.

3. Найдите корень уравнения $\sqrt{59 - 11x} = 9$.

4. Найдите корень уравнения $-\frac{x+4}{x+7} = -6$.

5. Найдите корень уравнения $2x^2 + x - 21 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $\log_5(7 + x) = 3$.
2. Найдите корень уравнения $7^{-6+x} = 343$.
3. Найдите корень уравнения $\sqrt{10 - 3x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.
4. Найдите корень уравнения $x^2 + 2x - 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

5. Найдите корень уравнения $\frac{x-9}{x-3} = 6$.

§ 10. Преобразования выражений

10.1. Рациональные выражения (дроби)

Вспомним, как производить простейшие вычисления с обыкновенными дробями. Чтобы перемножить дроби, нужно умножить их числители и записать результат в числитель, а потом перемножить знаменатели и результат записать в знаменатель:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}=\frac{ad}{bc},$$

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 5}{7\cdot 6}=\frac{25}{42}.$$

Если числитель и знаменатель дроби делятся на одно и то же число, то на него обычно делят каждый из них и называют это «сократить дробь»:

$$\frac{20}{30}=\frac{20:10}{30:10}=\frac{2}{3}.$$

Если дроби смешанные (с выделенной целой частью), то нужно их перевести в обыкновенные (состоящие только из числителя и знаменателя). Для этого целую часть умножают на знаменатель, прибавляют числитель и результат записывают в числитель, а знаменатель оставляют прежним:

$$3\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+2}{5}=\frac{17}{5},$$

$$3\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{19}=\frac{3\cdot 5+4}{5}\cdot\frac{5}{19}=\frac{19}{5}\cdot\frac{5}{19}=1.$$

Чтобы разделить число на обыкновенную дробь, нужно в этой дроби поменять местами числитель со знаменателем и умножить число на полученную дробь:

$$\frac{a}{b}:\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{15}.$$

Сложить дроби с разными знаменателями можно двумя способами.

1. Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительные множители так, чтобы новый знаменатель был равен

наименьшему общему кратному знаменателей исходных дробей. Сложим полученные дроби с одинаковым знаменателем:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3^{\backslash 3}}{8}+\frac{5^{\backslash 2}}{12}=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{9+10}{24}=\frac{19}{24}.$$

2. Умножим числитель и знаменатель первой дроби на знаменатель второй и наоборот. Сложим полученные дроби с одинаковым знаменателем:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3^{\backslash 12}}{8}+\frac{5^{\backslash 8}}{12}=\frac{3\cdot 12}{8\cdot 12}+\frac{5\cdot 8}{12\cdot 8}=\frac{36}{96}+\frac{40}{96}=$$
$$=\frac{36+40}{96}=\frac{76}{96}=\frac{19}{24}.$$

343. Найдите значение выражения $\left(-\frac{7}{8}+4\frac{2}{3}\right)\cdot 9{,}6$.

344. Найдите значение выражения $y=\frac{49x^2-25}{7x+5}-7x$.

10.2. Степени

Вспомним основные формулы.

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m};$$
$$a^n:a^m=a^{n-m};$$
$$(a^n)^m=a^{n\cdot m};$$
$$(ab)^m=a^m\cdot b^m;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m};$$

345. Найдите значение выражения $5^7\cdot 5^{10}:5^{15}$.

346. Найдите значение выражения $c^7:c^{11}\cdot c^6$ при $c=0{,}5$.

347. Найдите значение выражения $\dfrac{n^{\frac{7}{4}}}{n^{\frac{1}{12}}\cdot n^{\frac{1}{6}}}$ при $n=36$.

348. Найдите значение выражения $(7^3)^7:7^{20}$.

349. Найдите значение выражения $\dfrac{(18a^8b^9)^3\cdot(3a^9b^4)^2}{(3a^6b^5)^7}$.

$\boxed{350.}$ Найдите значение выражения $2^{\sqrt{12}-6}\cdot 2^{3-\sqrt{12}}$.

351. Найдите значение выражения $49^{\sqrt{3}+2} : 7^{2+2\sqrt{3}}$.

352. Найдите значение выражения $y = 11^{1{,}26}\cdot 121^{0{,}37}$.

10.3. Корни

Вспомним основные формулы:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};$$
$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$
$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$
$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m},\text{ если } k \text{ нечётно и}$$
$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{|a^m|},\text{ если } k \text{ чётно;}$$

$\boxed{353.}$ Найдите значение выражения $\dfrac{14\sqrt[18]{x}\sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}}$ при $x > 0$.

354. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt[5]{8a^2}\right)^{10}}{a^4}$ при $a \neq 0$.

355. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{p^3}\cdot\sqrt[6]{p}}$ при $p = \dfrac{1}{64}$.

356. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[4]{b^3}\cdot(\sqrt{7}b)^2}{b^{2{,}75}}$ при $b > 0$.

$\boxed{357.}$ Найдите значение выражения $\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a-7)^2}$ при $5 < a < 7$.

358. Найдите значение выражения $\sqrt{(b-12)^2}+\sqrt{(b-7)^2}$ при $7 \leqslant b \leqslant 12$.

10.4. Логарифмические выражения

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Тогда $a^{\log_a x} = x$.

Вспомним основные формулы.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\ y > 0;$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,\ y > 0;$$
$$\log_a(x^b) = b\log_a x;\quad \log_{a^b}(x) = \frac{1}{b}\log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \; x \neq 1.$$

Пусть $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. Тогда $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

359. Найдите значение выражения $6^{2\log_6 5}$.

360. Найдите значение выражения $7^{2+\log_7 3}$.

361. Найдите значение выражения $\dfrac{42}{5^{\log_5 7}}$.

362. Найдите значение выражения $\log_7 4{,}9 + \log_7 10$.

363. Найдите значение выражения $\log_5 12{,}5 + \log_5 10$.

364. Найдите значение выражения $\log_{0,7} 10 - \log_{0,7} 7$.

365. Найдите значение выражения $\log_{16} \log_3 9$.

366. Найдите значение выражения $\log_{256} \log_3 81$.

367. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{25} 7}{\log_{625} 7}$.

368. Найдите значение выражения $\dfrac{9^{\log_5 175}}{9^{\log_5 7}}$.

369. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{16} 17^3}{\log_{16} \sqrt{17}}$.

370. Найдите значение выражения $(1 - \log_3 15)(1 - \log_5 15)$.

371. Найдите значение выражения $(1 - \log_2 18)(1 - \log_9 18)$.

10.5. Тригонометрические выражения

372. Найдите значение выражения $\dfrac{3\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ}$.

373. Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$.

374. Найдите значение выражения $\dfrac{24\sin 298^\circ}{\sin 62^\circ}$.

375. Найдите значение выражения $15\,\mathrm{tg}\,15^\circ \cdot \mathrm{tg}\,285^\circ$.

376. Найдите значение выражения $5\sin\dfrac{11\pi}{12}\cos\dfrac{11\pi}{12}$.

377. Найдите значение выражения $14\sqrt{6}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}$.

378. Найдите значение выражения $18\sqrt{6}\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}$.

379. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

380. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

381. Найдите значение выражения $21\sin(\pi+\alpha) - 12\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$,

если $\sin\alpha = -\frac{1}{6}$.

382. Найдите значение выражения $16\cos(\pi+\beta)\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\beta\right)$,

если $\cos\beta = \frac{1}{2}$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\frac{2^{0,48}}{4^{1,24}}$.

2. Найдите значение выражения $\frac{a^{2,35}}{a^{2,97}\cdot a^{1,38}}$ при $a = 2{,}5$.

3. Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 5}$.

4. Найдите значение выражения $\log_2\log_2 256$.

5. Найдите значение выражения $\frac{18(\sin^2 36^\circ - \cos^2 36^\circ)}{\cos 72^\circ}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $3^{2\frac{1}{3}}\cdot 9^{1\frac{1}{3}}$.

2. Найдите значение выражения $\frac{x^{-8}\cdot x^6}{x^{-3}}$ при $x = 28$.

3. Найдите значение выражения $\frac{\log_{10} 13}{\log_{10}\sqrt[7]{13}}$.

4. Найдите значение выражения $4^{\log_2 5}$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{4\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{3}}\right)^2$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{x^5\cdot x^6}{x^9}$ при $x=12$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 57}{\log_8 57}$.

4. Найдите значение выражения $\log_5 0{,}5+\log_5 50$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{8}{\sin^2 35^\circ+\sin^2 125^\circ}$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $77^8 : 11^7 : 7^6$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}{6+\sqrt{35}}$.

3. Найдите значение выражения $\log_3 8\cdot\log_2 27$.

4. Найдите значение выражения $5^{\log_{25} 64}$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{8\sin 13^\circ}{\sin 347^\circ}$.

§ 11. Геометрический смысл производной. Первообразная

Производная определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. Функцию, имеющую производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в этой точке). Процесс вычисления производной называется дифференцированием. Производная функции также является функцией.

Производной функции в точке называют число, равное пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при стремящемся к нулю приращении аргумента.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

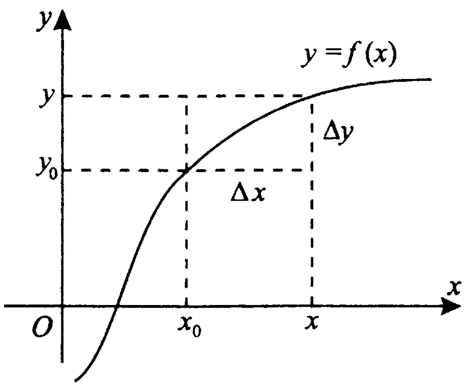


Рис. 69.

Рассмотрим рисунок 69. Здесь $\Delta x = x - x_0$ — это приращение (изменение) аргумента, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции.

По определению производной

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Геометрический смысл производной

Значение производной функции в точке $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0. Нужно помнить, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона касательной (или, другими словами, тангенсу угла, образованного касательной и положительным направлением оси Ox).

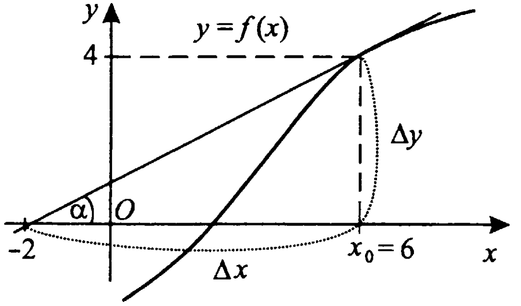


Рис. 70.

Например, на рисунке 70 $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = k_{\text{кас}}$.

Видим, что $\Delta y = 4$, $\Delta x = 8$. Тогда $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$.

Обратите внимание, что Δy и Δx вместе с отрезком касательной образуют прямоугольный треугольник. Если в этом треугольнике мы разделим Δy на Δx, то получим абсолютное значение производной. Знак производной мы можем определить тремя способами.

1-й способ.

Если точка принадлежит промежутку возрастания функции, то значение производной в этой точке положительно, а если промежутку убывания, то значение производной отрицательно.

2-й способ.

Рассмотрим угол между касательной к графику функции в некоторой точке и осью абсцисс (это угол, отсчитываемый в положительном направлении — против часовой стрелки — от положительного направления оси Ox до касательной). Если угол острый, то значение производной в этой точке положительно, а если угол тупой, то значение производной в этой точке отрицательно.

3-й способ.

Возьмём координаты произвольной точки касательной (x_1, y_1). Теперь рассмотрим любую точку касательной, абсцисса которой x_2 больше, чем абсцисса первой точки. Если при этом и её ордината y_2 больше y_1, то производная положительна, если меньше — производная отрицательна.

Полезно знать, что угловые коэффициенты параллельных прямых равны и что прямая, параллельная оси абсцисс Ox, имеет угловой коэффициент, равный нулю.

Применение производной к исследованию функций

Если производная положительна на некотором промежутке (при этом она может быть равна нулю в некоторых точках промежутка), то функция возрастает на этом промежутке.

Если производная отрицательна на некотором промежутке (при этом она может быть равна нулю в некоторых точках промежутка), то функция убывает на этом промежутке.

Если производная непрерывной функции меняет знак при переходе через точку $x = x_0$ (см. рис. 71), причём в точке $x = x_0$ производная равна нулю или не существует, то точка $x = x_0$ — точка экстремума (точка минимума или точка максимума).

Рис. 71.

Приведём пример нахождения точек максимума и минимума по графику производной. На рисунке 72 изображены два графика производных разных функций. На обоих графиках $x = a$ — точка максимума функции $f(x)$; $x = b$ — точка минимума функции $f(x)$.

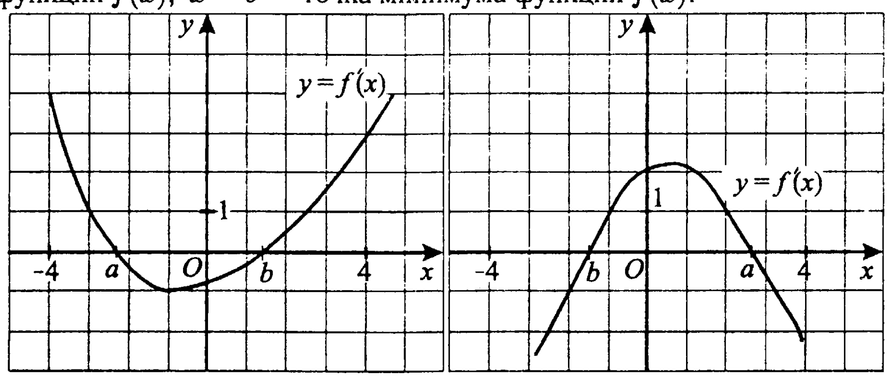


Рис. 72.

Если функция непрерывна на отрезке, то она принимает наибольшее и наименьшее значение либо на концах отрезка, либо в тех точках, где производная равна нулю (или не существует).

383. На рисунке 73 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

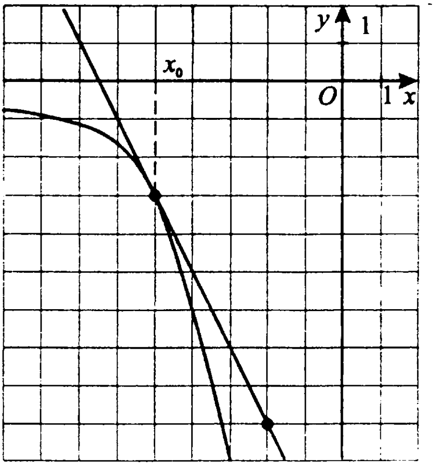


Рис. 73.

384. На рисунке 74 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной -3. Найдите значение производной этой функции в точке $x_0 = -3$.

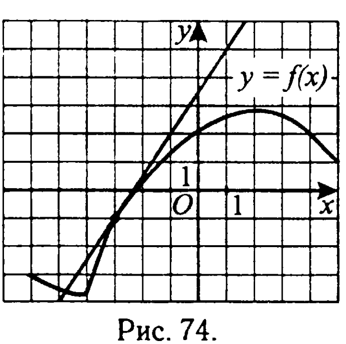


Рис. 74.

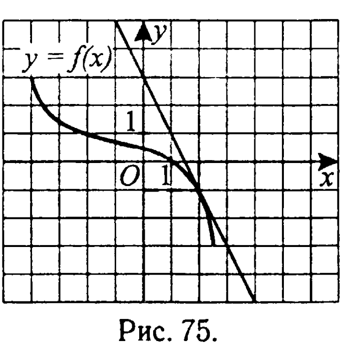


Рис. 75.

385. На рисунке 75 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке $(2; -1)$. Найдите значение производной этой функции при $x = 2$.

386. На рисунке 76 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

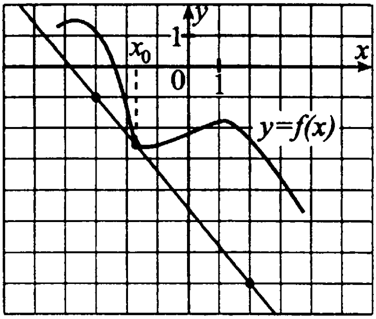


Рис. 76.

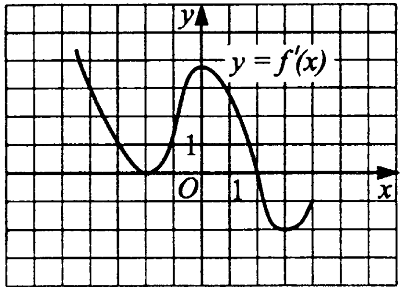


Рис. 77.

387. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$, если на рисунке 77 изображён график производной этой функции.

$\boxed{\textbf{388.}}$ На рисунке 78 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Определите количество точек с целочисленными абсциссами, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

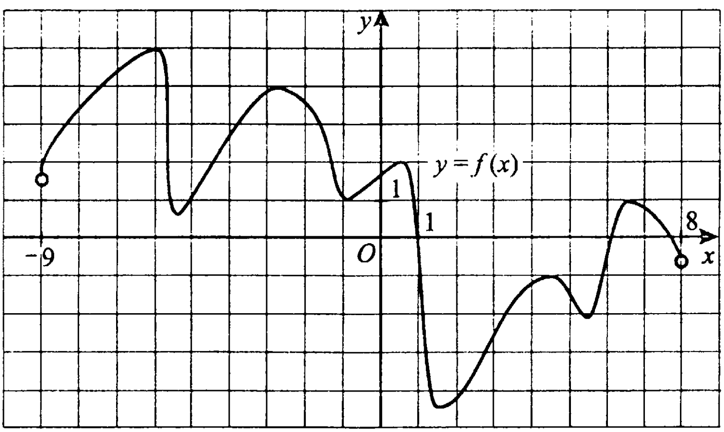


Рис. 78.

389. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 79 изображён график производной этой функции. К графику функции $y = f(x)$ провели касательные во всех точках, абсциссы которых — положительные целые числа. Укажите количество точек графика функции $y = f(x)$, в которых проведённые касательные имеют отрицательный угловой коэффициент.

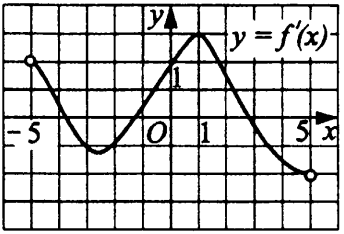


Рис. 79.

390. На рисунке 80 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 3]$.

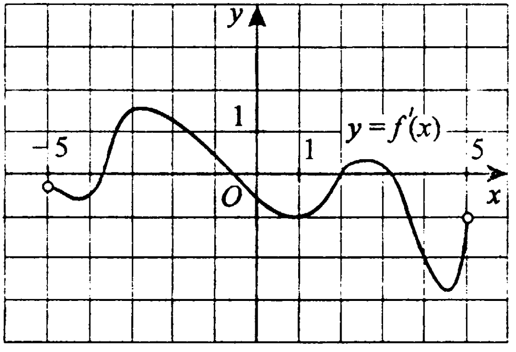


Рис. 80.

391. На рисунке 81 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 5]$.

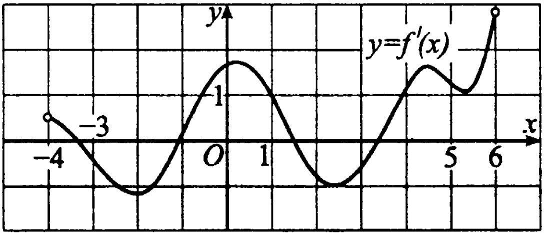


Рис. 81.

392. На рисунке 82 изображён график производной функции $f(x)$. Определите количество точек экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 5)$.

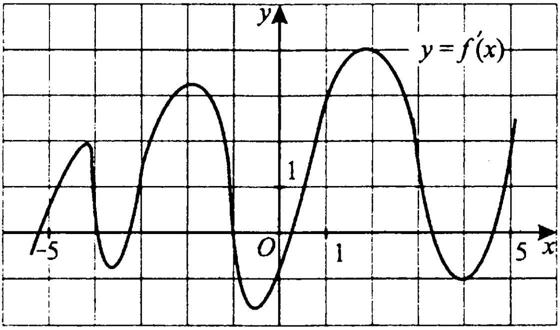


Рис. 82.

393. На рисунке 83 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 10)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-3; 4)$.

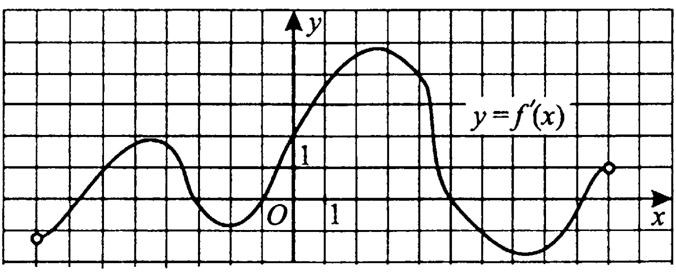


Рис. 83.

394. На рисунке 84 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$ на интервале $(-3; 3)$.

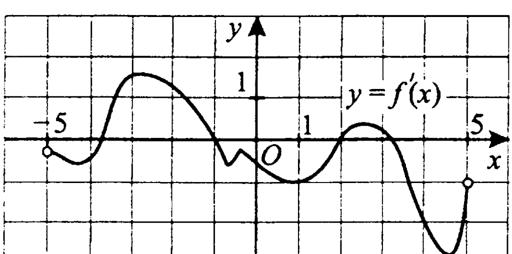


Рис. 84.

395. На рисунке 85 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4{,}5; 5)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

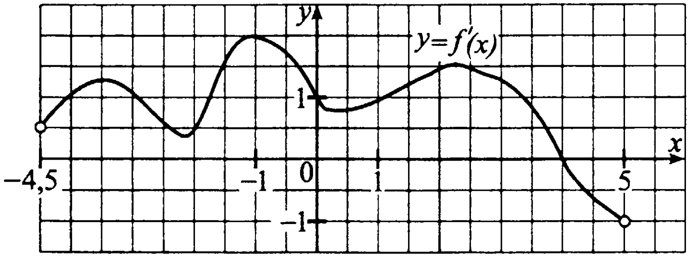


Рис. 85.

396. На рисунке 86 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 4)$.

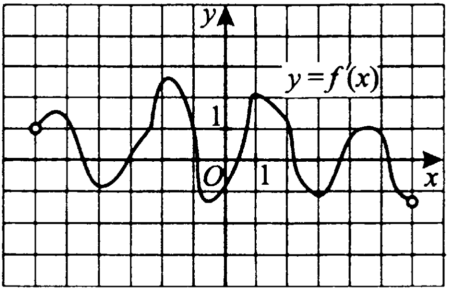


Рис. 86.

397. На рисунке 87 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 10]$.

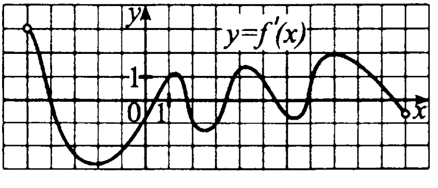


Рис. 87.

398. На рисунке 88 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

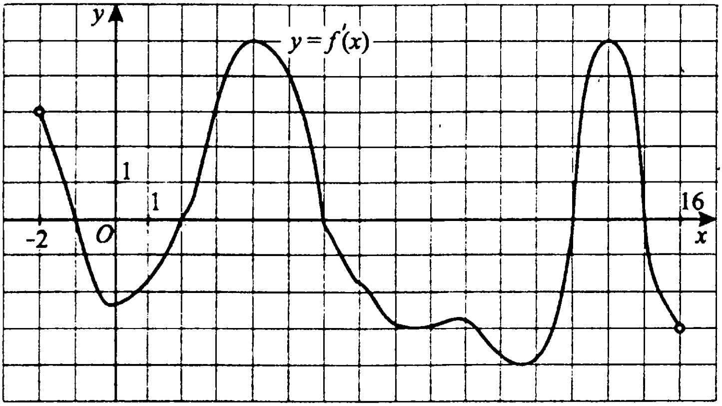


Рис. 88.

399. На рисунке 89 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите промежутки возрастания $f(x)$. В ответ укажите длину наибольшего из них.

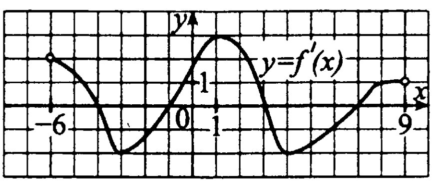


Рис. 89.

400. На рисунке 90 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$?

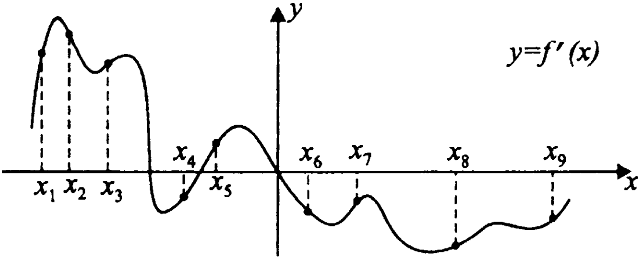


Рис. 90.

401. На рисунке 91 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$. Сколько из этих точек принадлежат промежуткам возрастания функции $f(x)$?

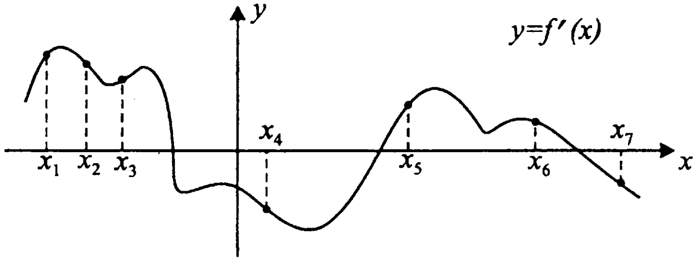


Рис. 91.

402. На рисунке 92 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.

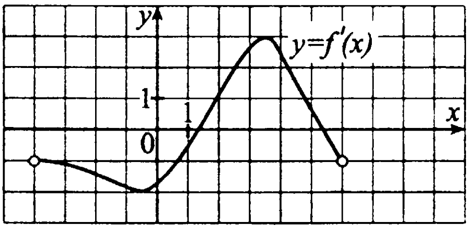


Рис. 92.

$\boxed{403.}$ На рисунке 93 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-1, 1, 2, 4, 6$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

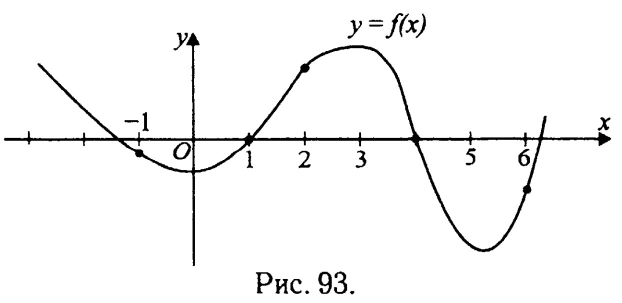


Рис. 93.

404. На рисунке 94 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 2, 3, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

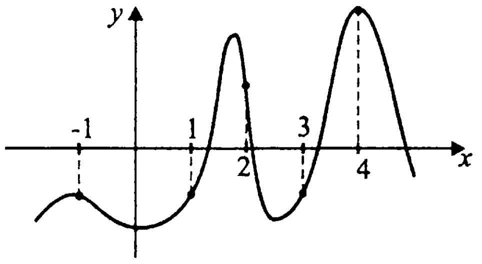


Рис. 94.

405. На рисунке 95 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-4, -3, -2, -1, 1$. В какой из этих точек значение производной данной функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.

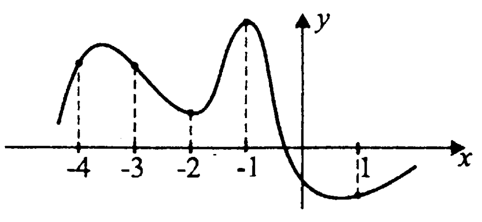


Рис. 95.

406. На рисунке 96 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

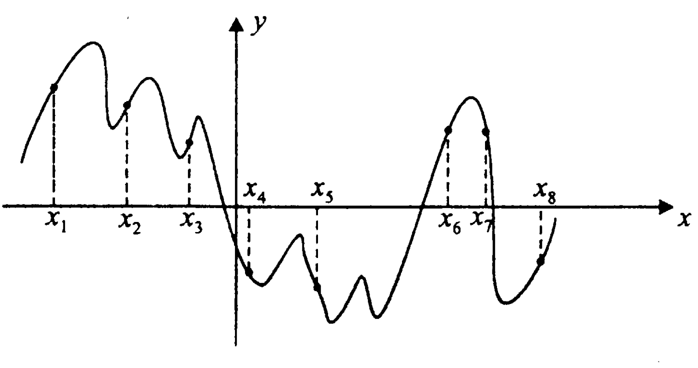


Рис. 96.

407. На рисунке 97 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7{,}5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

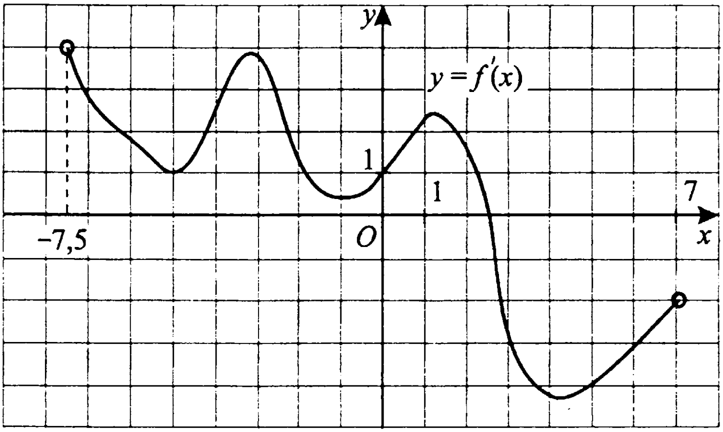


Рис. 97.

408. На рисунке 98 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $f(x)$ параллельна оси абсцисс.

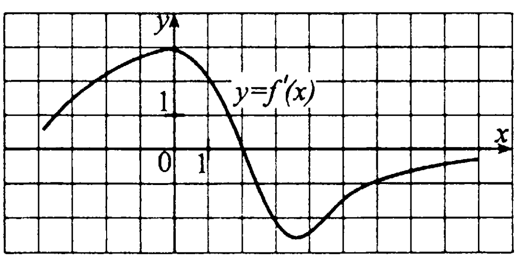


Рис. 98.

409. На рисунке 99 изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8, 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 3$ или совпадает с ней.

410. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке с абсциссой $x_0 = 3$. Определите градусную меру угла наклона касательной, если на рисунке 100 изображён график производной этой функции.

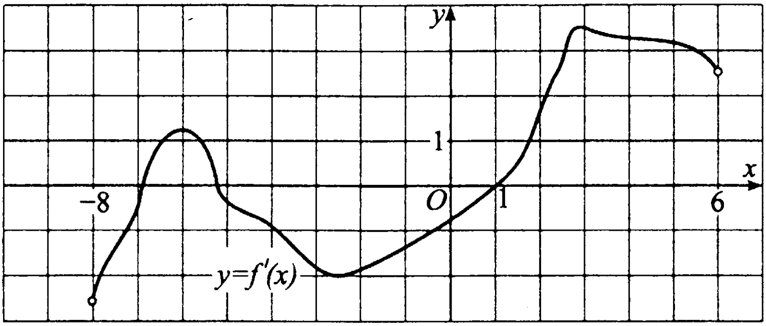


Рис. 99.

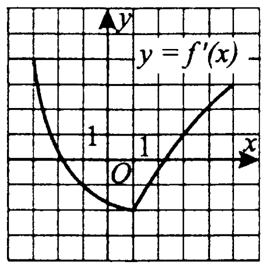


Рис. 100.

411. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 5)$. На рисунке 101 изображён график её производной. Найдите угол наклона касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$, к положительному направлению оси Ox в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Ответ укажите в градусах.

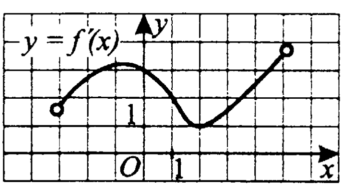


Рис. 101.

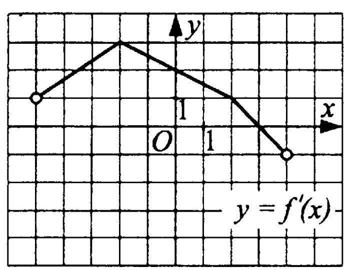


Рис. 102.

412. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 4)$. На рисунке 102 изображён график её производной. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом 45° к положительному направлению оси абсцисс.

413. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 5)$. На рисунке 103 изображён график её производной. Найдите угол наклона (в градусах) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = 1$ к положительному направлению оси Ox.

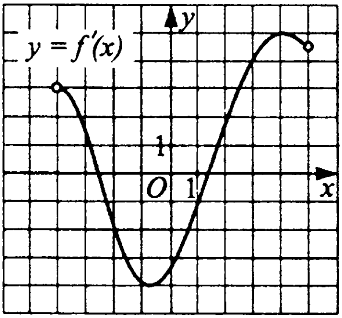


Рис. 103.

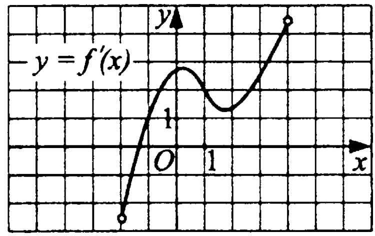


Рис. 104.

414. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2; 4)$. На рисунке 104 изображён график её производной. Определите абсциссу точки, касательная в которой составляет с осью Ox угол $45°$.

415. На рисунке 105 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристики функции и производной.

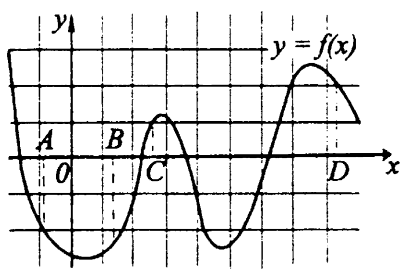


Рис. 105.

ТОЧКИ

A

B

C

D

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНОЙ

1) значение функции в точке отрицательно, и значение производной функции в точке отрицательно
2) значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
3) значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно
4) значение функции в точке положительно, и значение производной функции в точке положительно

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

416. На рисунке 106 изображён график функции $y = f(x)$. Числа a, b, c, d и e задают на оси Ox интервалы. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции или её производной.

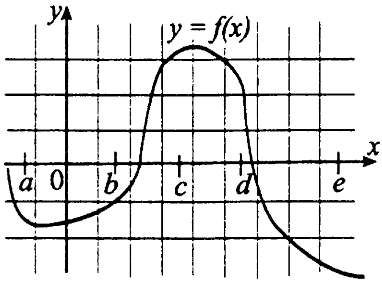


Рис. 106.

ИНТЕРВАЛЫ

А) $(a;\ b)$

Б) $(b;\ c)$

В) $(c;\ d)$

Г) $(d;\ e)$

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ

1) значения функции положительны в каждой точке интервала
2) значения функции отрицательны в каждой точке интервала
3) значения производной функции положительны в каждой точке интервала
4) значения производной функции отрицательны в каждой точке интервала

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

417. На рисунке 107 изображены график функции $y = f(x)$ и касательные, проведённые к нему в точках с абсциссами A, B, C и D.

В правом столбце указаны значения производной функции в точках A, B, C и D. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной в ней.

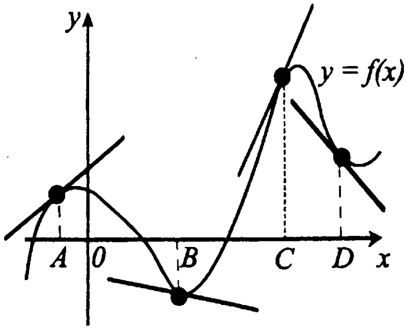


Рис. 107.

ТОЧКИ	ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ
A	1) $\frac{9}{4}$
B	2) $-0{,}2$
C	3) $-\frac{7}{6}$
D	4) $1{,}2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

418. На рисунке 108 изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки A, B, C и D на оси Ox. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке характеристики функции и производной.

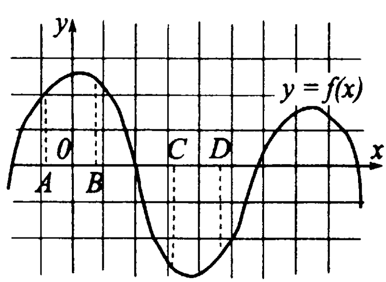


Рис. 108.

ТОЧКИ	ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНОЙ
A	1) значение функции в точке отрицательно, и значение производной функции в точке отрицательно
B	2) значение функции в точке отрицательно, а значение производной функции в точке положительно
C	3) значение функции в точке положительно, а значение производной функции в точке отрицательно
D	4) значение функции в точке положительно, и значение производной функции в точке положительно

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C	D

$\boxed{\textbf{419.}}$ Прямая $y = -4x + 15$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11$. Найдите абсциссу точки касания.

420. Прямая $y = 56$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 21x + 9$. Найдите абсциссу точки касания.

421. Прямая $y = 6x - 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 - 2x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.

11.1. Первообразная

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на числовом промежутке A. Если функция $F(x)$ такова, что для любого x из промежутка A выполняется $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$.

Две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную величину. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то при любом числе C функция $F(x) + C$ тоже будет первообразной для $f(x)$.

Все графики первообразных для одной и той же функции $f(x)$ получаются друг из друга сдвигом вдоль оси Oy (см. рис. 109).

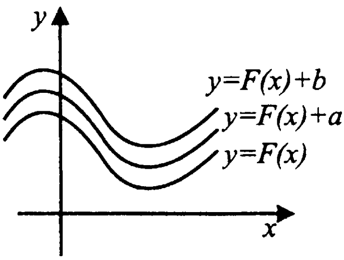


Рис. 109.

Как проверить, правильно ли мы нашли первообразную для данной функции? Нужно найти производную от найденной первообразной. Например, $y = \frac{1}{3}x^3 + 5$ является первообразной функции $y = x^2$, потому что $\left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2$.

На рисунке 110 изображена фигура, ограниченная снизу отрезком $[a; b]$, с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, принимающей неотрицательные значения. Такую фигуру называют криволинейной трапецией, отрезок $[a; b]$ — её основанием.

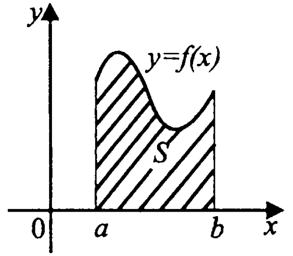


Рис. 110.

Площадь S криволинейной трапеции можно вычислить с помощью первообразной функции по формуле $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

422. На рисунке 111 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 1$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

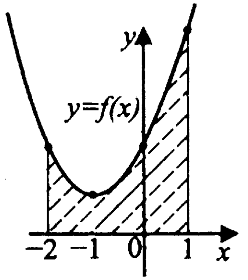


Рис. 111.

423. На рисунке 112 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - \frac{12}{5}$ является одной из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

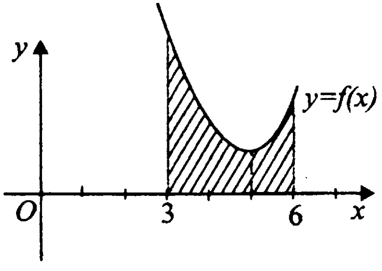


Рис. 112.

424. На рисунке 113 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 - 9x^2 + 29x + \frac{4}{17}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

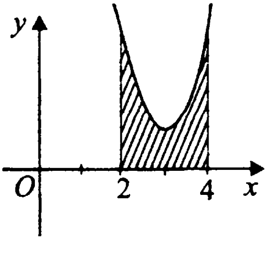


Рис. 113.

425. На рисунке 114 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{x^3}{4} + 6x^2 - 45x + 64$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

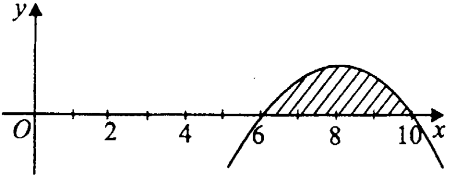


Рис. 114.

426. На рисунке 115 изображён график функции $f(x) = 5 - |x+1| - |x-2|$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(3) - F(-1)$, где $F(x)$ — некоторая первообразная $f(x)$.

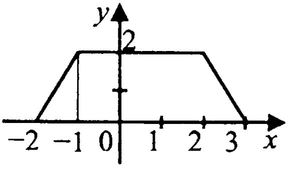


Рис. 115.

427. На рисунке 116 изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(2) - F(-1)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

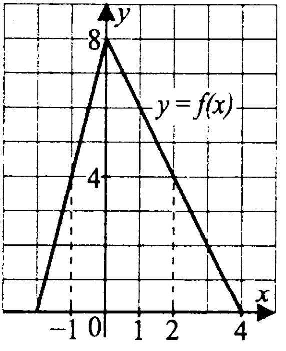


Рис. 116.

428. На рисунке 117 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(-3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

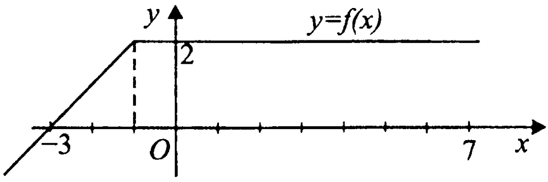


Рис. 117.

429. На рисунке 118 изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(1) - F(-7)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

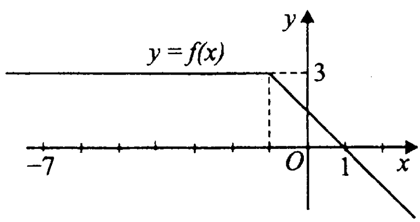


Рис. 118.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Прямая $y = 2x - 7$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 119 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. В какой точке отрезка $[-1; 7]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

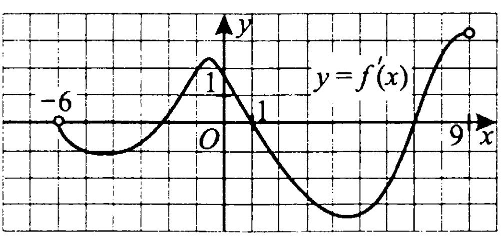


Рис. 119.

11. Зак. № 21

3. На рисунке 120 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.

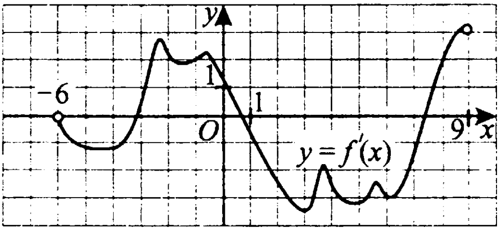


Рис. 120.

4. На рисунке 121 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

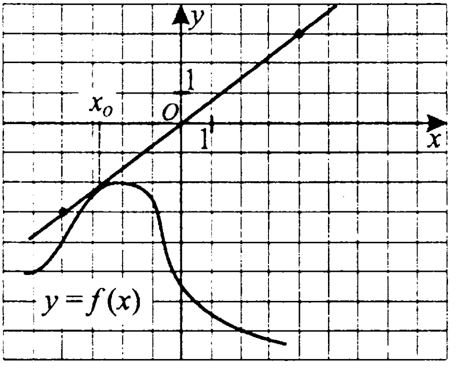


Рис. 121.

5. На рисунке 122 изображён график некоторой функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $(0; +\infty)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{-3}{x^2} + 2x - 3$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

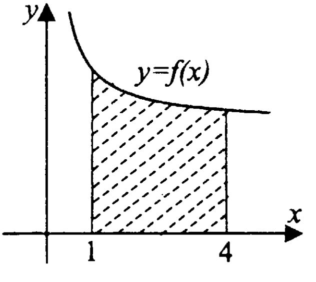


Рис. 122.

Вариант 2

1. Прямая $y = 47x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 123 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 5)$. Определите количество целочисленных значений x, при которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

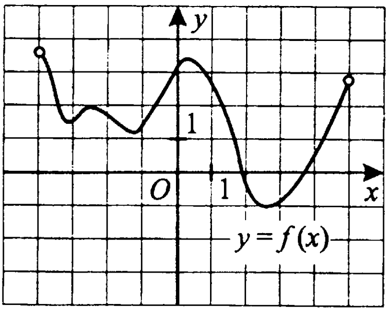


Рис. 123.

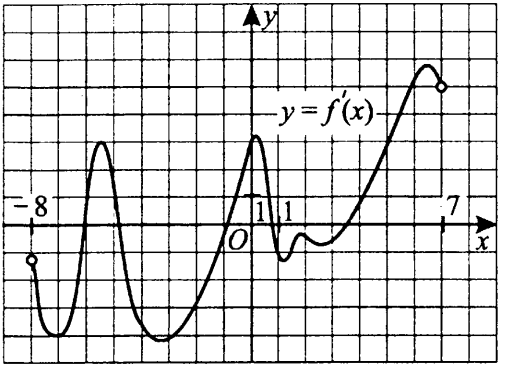


Рис. 124.

3. На рисунке 124 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 12$.

4. На рисунке 125 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

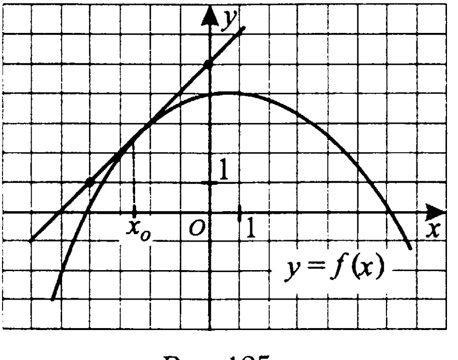


Рис. 125.

5. На рисунке 126 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(3) - F(-1)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

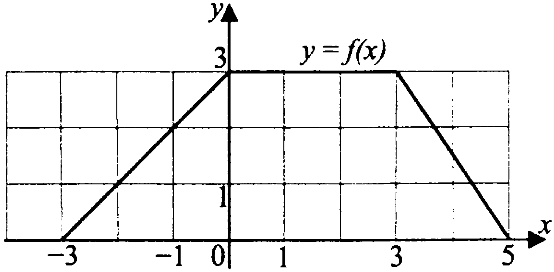


Рис. 126.

Вариант 3

1. Прямая $y = 3x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 3x - 18$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 127 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?

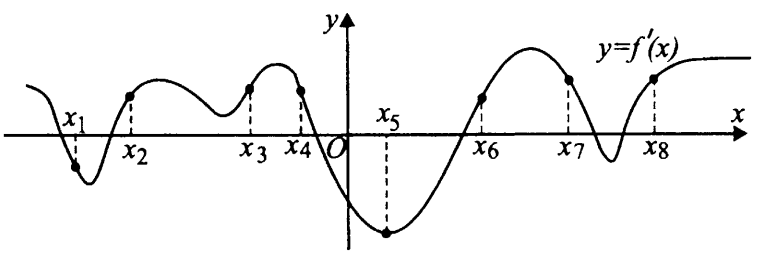


Рис. 127.

3. На рисунке 128 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$ на интервале $(-5; 4)$.

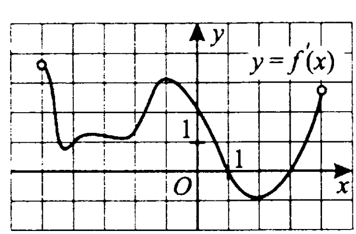


Рис. 128.

4. На рисунке 129 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

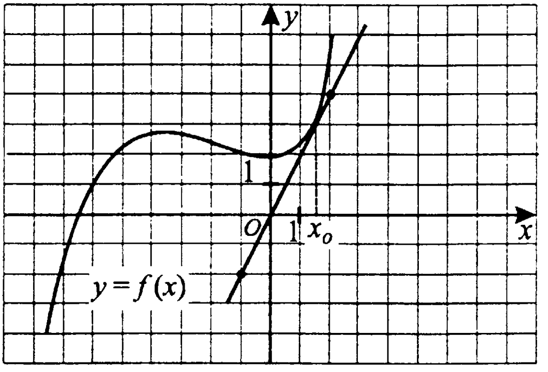


Рис. 129.

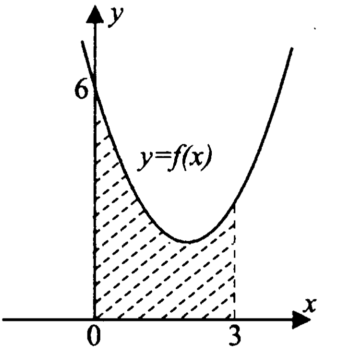


Рис. 130.

5. На рисунке 130 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x - 4$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

Вариант 4

1. Прямая $y = -3x + 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x + 1$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 131 изображён график производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

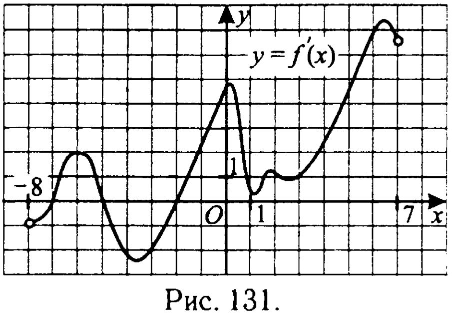


Рис. 131.

3. На рисунке 132 изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?

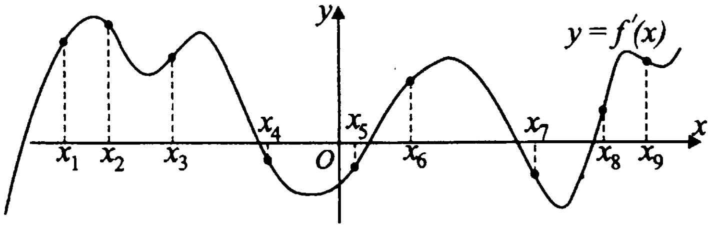


Рис. 132.

4. На рисунке 133 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

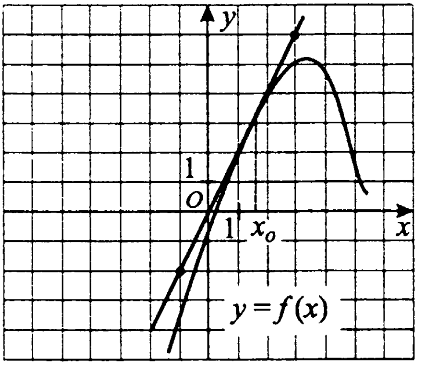


Рис. 133.

5. На рисунке 134 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -2x^3 + 51x^2 - 420x + 14$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

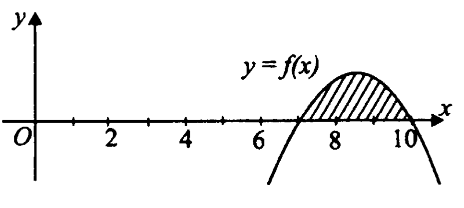


Рис. 134.

§ 12. Исследование функции с помощью производной

Производные некоторых элементарных функций

$$(c)' = 0, \text{ где } c = const;$$
$$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \text{ где } \alpha = const;$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$
$$(\sin x)' = \cos x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x;$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(a^x)' = a^x \ln a;$$
$$(e^x)' = e^x;$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad c - const;$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$
$$(uv)' = u'v + uv';$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$
$$y = f\big(g(x)\big), \quad y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \text{ где } u = g(x).$$

Нахождение наибольшего (наименьшего) значений

Один из способов отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке — посчитать её значения на концах отрезка и в точках, где производная равна нулю (или не существует), и выбрать из них наибольшее или наименьшее значение.

Второй способ отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке — исследовать функцию на монотонность (другими словами, на возрастание-убывание), построить эскиз и посчитать значения функции в нужных точках.

Точки максимума могут как совпадать, так и не совпадать с точками, где функция принимает наибольшее значение. То же можно сказать про точки минимума и про точки, где функция принимает наименьшее значение.

12.1. Многочлены

430. Найдите точку минимума функции $y = (x-2)^2(2x+3)+5$.

431. Найдите точку максимума функции $y = (x-6)^2(2x+3)+4$.

432. Найдите наименьшее значение функции $y = (x+4)^2(x+6)$ на отрезке $[-4; 2]$.

433. Найдите точку минимума функции $y = 10x^3 + 15x^2 - 180x + 17$.

434. Найдите точку максимума функции $y = 6 + 81x - \dfrac{x^3}{3}$.

12.2. Тригонометрические функции

435. Найдите наименьшее значение функции

$y = 3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

436. Найдите наибольшее значение функции $y = 16x - 16\operatorname{tg} x + 4\pi - 56$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

437. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{20\sqrt{3}}{\pi} + \dfrac{6}{\pi}(44x - 10\operatorname{tg} x)$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

438. Найдите наибольшее значение функции $y = 5\sqrt{2}\sin x - 5x + \dfrac{5\pi}{4} - 3$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

439. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\sin x + 4x - 2\pi$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

440. Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x - 7x - 12$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

441. Найдите наименьшее значение функции $y = 18x - 18\operatorname{tg} x + 4$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; 0\right]$.

12.3. Степени и корни

$\boxed{442.}$ Найдите наименьшее значение функции $y = (x+7)e^{x+8}$ на отрезке $[-9; -7]$.

443. Найдите точку минимума функции $y = (5-x)e^{5-x}$.

444. Найдите точку максимума функции $y = \dfrac{9}{x} + x + 6$.

445. Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 2$.

446. Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{5}{2}} - 6x\sqrt{x} + 18$.

447. Найдите наименьшее значение функции $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10x-x^2-29}$.

448. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{5}{x} + 2013$

на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}; 10\right]$.

449. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2+8x+17)e^{x-3} + 1$ на отрезке $[0; 3]$.

12.4. Логарифмы

$\boxed{450.}$ Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2+2x+4) + 3$.

451. Найдите точку максимума функции $y = 8 - x + \ln(x+4)$.

452. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3(18+6x-x^2) + 4$.

453. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - \ln(4x+2) - 8$.

454. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x - \ln(2x) - 4$

на отрезке $\left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{7}{4}\right]$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-2; 5]$.

2. Найдите наименьшее значение функции

$y = 16\cos x + 27x - 6$ на отрезке $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

3. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{28x}{\pi} + 7\sin x + 2$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

4. Найдите наибольшее значение функции
$y = 5\ln(x+5) - 5x + 11$ на отрезке $[-4{,}8; 0]$.

5. Найдите точку максимума функции $y = (31 - x)e^{x+31}$.

Вариант 2

1. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+5)^2(x-3)-6$ на отрезке $[-5; 0]$.

2. Найдите наибольшее значение функции
$y = 18x - 17\sin x + 2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = 8x - \ln(x+12)^8$ на отрезке $[-11{,}5; 0]$.

4. Найдите наибольшее значение функции
$y = x^2 - 15x + 13\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right]$.

5. Найдите точку минимума функции $y = (35 - x)e^{35-x}$.

Вариант 3

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-3)^2(x+1)+2$ на отрезке $[-1; 5]$.

2. Найдите наибольшее значение функции
$y = 15x - 14\sin x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

3. Найдите наименьшее значение функции
$y = 15x - 15\ln(x+11) + 4$ на отрезке $[-10{,}5; 8]$.

4. Найдите наибольшее значение функции
$y = 80x - 80\operatorname{tg} x + 20\pi$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$.

5. Найдите точку максимума функции $y = (23 + x)e^{23-x}$.

Вариант 4

1. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+7)^2(x-2)+10$ на отрезке $[-1; 3]$.
2. Найдите наибольшее значение функции
$y = \frac{51x}{\pi} + 17\sin x + 15$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.
3. Найдите наименьшее значение функции
$y = -8x + 8\operatorname{tg} x - 14$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
4. Найдите наименьшее значение функции
$y = 5x^2 - 5x - 5\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$.
5. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - x - 5)e^{x+8}$.

§ 13. Содержательные задачи из различных областей науки

13.1. «Экономические» задачи

455. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 9-балльной шкале целыми числами от -4 до 4.

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — всемеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{7In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

456. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -4 до 4. Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится впятеро, информативность втрое, а оперативность вдвое дороже, чем качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \dfrac{3In + 2Op + 5Tr + Q}{A}$. Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

457. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$R = r_{\text{пок}} - \dfrac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)\cdot \dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}}$, где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Центы», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 19, их средняя оценка равна 0,4, а оценка экспертов равна 0,21.

458. Зависимость объёма спроса на продукцию некоторой фирмы от цены продукции задаётся формулой $q(p) = 280 - 10p$, где p — цена (тыс. руб.), q — спрос (единиц в месяц). Определите максимальный уровень цены (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 960 тыс. руб.

459. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 175 - 20p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 375 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

460. Для одного из предприятий зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 120 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составляет не менее 320 тыс. руб.

461. Операционная прибыль предприятия за краткосрочный период вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб. за штуку, постоянные расходы предприятия $f = 800\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 700 000 руб. в месяц.

462. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 750$ руб. за единицу. Переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 250$ руб., постоянные расходы предприятия — $f = 800\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в руб.) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 400 000 руб.

13.2. «Физические» задачи

463. Коэффициент полезного действия теплового двигателя вычисляется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД двигателя будет не менее 75%, если температура холодильника $T_2 = 350$ К?

464. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 20%, если температура холодильника $T_2 = 310$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

465. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 70 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Чему равно наименьшее возможное сопротивление (в омах) этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление определяется формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 21 Ом?

466. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 90 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрочайник. Каково наименьшее возможное сопротивление электрочайника, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не менее 36 Ом?

467. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 80 В? Ответ выразите в омах.

468. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 250$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c + u}{c - v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с); $u = 20$ м/с и $v = 5$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости

c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 270 Гц?

469. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{7} \cdot 10^{16}$ м^2, а излучаемая ею мощность P составляет $19{,}551 \cdot 10^{22}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

470. Для определения температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная Стефана–Больцмана, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = 1{,}5 \cdot 10^{10}$ м^2, а излучаемая ею мощность P равна $8{,}55 \cdot 10^{18}$ ватт. Определите температуру этой звезды.

471. Изменение высоты полёта брошенного вертикально вверх мяча описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 30t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд мяч находился на высоте не менее 25 м?

472. Скорость автомобиля v, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч^2, вычисляется по формуле $v^2 = 2la$. Определите, с какой наименьшей скоростью будет двигаться автомобиль на расстоянии 0,4 километра от старта, если по конструктивным особенностям автомобиля приобретаемое им ускорение не меньше 8000 км/ч^2. Ответ выразите в км/ч.

473. Парашютисты-экстремалы определяют высоту сооружений для будущих прыжков, засекая время падения небольших камней с вершин сооружений до поверхности приземления. Приближённая зависимость высоты от времени свободного падения имеет вид $h = 4{,}9t^2$. Здесь h — высота в метрах, t — время в секундах. С вершины первого сооружения камень падал 4,5 с. На сколько метров второе сооружение выше первого, если с вершины второго сооружения камень падал на 1 с дольше?

474. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,6 с. На сколько метров должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,4 с?

$\boxed{\textbf{475.}}$ При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 6 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ ^\circ C^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

476. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 12{,}5$ м. При прокладке между рельсами оставили зазор 9 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? Ответ выразите в градусах Цельсия.

$\boxed{\textbf{477.}}$ Зависимость температуры нагревательного элемента прибора от времени имеет вид $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 100$ К, $a = 37{,}5$ К/мин, $b = -0{,}25$ К/мин^2. Прибор может испортиться при температуре свыше 1000 К. Определите момент времени (в минутах), когда прибор необходимо отключить, чтобы он не вышел из строя.

$\boxed{\textbf{478.}}$ При вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды, v — скорость движения ведёрка, L — длина верёвки, g — ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью (в м/с) надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 90 см? (g считать равным 10 м/с^2.)

479. При быстром вращении ведёрка с водой вода из него не будет выливаться. При этом сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет неотрицательной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления может быть равной нулю и выражается формулой $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения ($g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,729 м? Ответ выразите в метрах в секунду.

480. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 490$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью v приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 340$ м/с. Ответ выразите в м/с.

$\boxed{\textbf{481.}}$ Глубоководники проектируют новый батискаф в виде сферы радиуса R. Выталкивающая сила Архимеда, действующая на батискаф, вычисляется по формуле $F_A = \rho g V = \rho g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. Определите максимальный радиус батискафа (в метрах), если сила Архимеда по технологии не должна превосходить 1 130 400 Н. При расчёте примите следующие значения постоянных: $\rho = 1000$ кг/м^3, $g = 10$ Н/кг, $\pi = 3{,}14$.

482. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P = \frac{4mg}{\pi D^2}$, где $m = 270$ кг — общая масса навеса и колонны, D — диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, а $\pi = 3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 640 000 Па. Ответ выразите в метрах.

483. Камень бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности Луны. Время полёта камня (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 5 секунд, если камень бросают с начальной скоростью $v_0 = 8$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 1{,}6$ м/с^2.

484. Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на неё проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера (в Н·м), стремящейся повернуть рамку, определяется формулой $M = NIBl^2 \sin\alpha$, где $I = 8$А — сила тока в рамке, $B = 0{,}05$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0{,}03$ м — размер рамки, $N = 500$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,09 Н·м?

485. Плоский замкнутый контур площадью $S = 0{,}3$ м^2 находится в магнитном поле, индукция которого равномерно возрастает. При этом согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в контуре появляется ЭДС индукции, значение которой, выраженное в вольтах, определяется формулой $\varepsilon_i = aS\cos\alpha$, где α — острый угол между направлением магнитного поля и перпендикуляром к контуру, $a = 25 \cdot 10^{-4}$ Тл/с — постоянная, S — площадь замкнутого контура, находящегося в магнитном поле (в м^2). При каком минимальном угле α (в градусах) ЭДС индукции не будет превышать $375 \cdot 10^{-6}$ В?

486. Груз массой 0,16 кг колеблется на пружине со скоростью, меняющейся по закону $v(t) = 2\cos\pi t$, где t — время в секундах. Кинетическая энергия груза вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Определите, какую долю времени из первой секунды после начала движения кинетическая энергия груза будет не менее 0,24 Дж. Ответ выразите десятичной дробью, при необходимости округлите до сотых.

487. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \dfrac{m}{m+M} v\cos\alpha$ (м/с), где $m = 60$ кг —

масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 240$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,2 м/с?

488. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решётке с периодом, не превосходящим 3000 нм?

489. Два тела массой $m = 3$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 4$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 24 джоулей?

490. Очень лёгкий заряжённый металлический шарик с зарядом $q = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 2$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, равная $F_л = qvB \sin\alpha$ (Н) и направленная вверх перпендикулярно плоскости. При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0°; 180°]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила $F_л$ была не менее чем $25 \cdot 10^{-9}$ Н? Ответ дайте в градусах.

$\boxed{\textbf{491.}}$ Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $v = 40$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}3$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha v T \log_2 \dfrac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 3{,}5$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 126 000 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

492. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п = 25\,°C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду с начальной температурой $T_в = 65\,°C$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(°C)$, причём $x = \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п}$ (м), где $c = 4200\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot°C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 28 м?

493. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 100$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг?

494. Расстояние (в километрах) от наблюдателя, находящегося на высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 16 километров? Ответ выразите в километрах.

495. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h километров над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ (км) — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 24 километра? Ответ выразите в километрах.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель оценивается целыми числами от -3 до 3. Аналитик, составляющий формулу, считает, что объективность публикаций ценится вдвое, а информативность — втрое дороже, чем оперативность. В результате формула примет вид $R = \frac{2In + Op + 3Tr}{A}$.

Каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели наибольшие, получило рейтинг 60?

2. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -4t^2 + 25t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 25 метров.

3. При температуре $0\,^\circ\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При температуре $0\,^\circ\mathrm{C}$ между рельсами оставили зазор в 9 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^\circ\mathrm{C}^{-1})$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

4. Небольшой мячик бросают под острым углом α к поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 14$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10\,\text{м/с}^2$). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 9,8 м?

5. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,2} = const$, где p (атм.) — давление, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 51,2 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками сосуд выдерживает давление не более 64 атмосфер. Определите, до какого минимального объёма можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Вариант 2

1. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In, оперативности Op, объективности публикаций Tr, а также качества сайта Q. Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 5-балльной шкале целыми числами от -2 до 2. Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — вшестеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид $R = \dfrac{6In + Op + 2Tr + Q}{A}$. Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A, при котором это условие будет выполняться.

2. После паводка уровень воды в колодце может повыситься. Можно определить его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая по формуле $h = -5t^2$ м. До паводка время падения камушков составляло 1,2 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось больше, чем на 0,2 с? (Ответ выразите в м.)

3. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 280$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \dfrac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 30$ м/с и $v = 20$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 330 Гц?

4. Два тела, массой $m = 5$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 4$ м/с под углом α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Под каким наименьшим углом α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 60 джоулей энергии?

5. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \dfrac{1}{324} \cdot 10^{17}$м^2, а излучаемая ею мощность P равна $184{,}68 \cdot 10^{18}$ Вт. Определите температуру этой звезды.

Вариант 3

1. Операционная прибыль предприятия за краткосрочный период вычисляется по формуле $h(q) = q(p-m)-k$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p = 8000$ руб. за штуку, затраты на производство одной единицы продукции составляют $m = 2000$ руб., постоянные расходы предприя-

тия $k = 10\,500\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 1 500 000 руб. в месяц.

2. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 120 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить холодильник. Чему равно наименьшее возможное сопротивление (в омах) этого холодильника, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление определяется формулой $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 48 Ом?

3. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 60$ см. Расстояние от линзы до лампочки d_1 может изменяться в пределах от 85 см до 105 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} = \dfrac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

4. При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 300\sqrt{2}$ нм на дифракционную решётку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin\varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать седьмой максимум на решётке с периодом, не превосходящим 4200 нм?

5. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу 900 тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной 15 метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \dfrac{mg}{2ls}$, где m — масса экскаватора (в тоннах), l — длина балок в метрах, s — ширина балок в метрах, $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 120 кПа. Ответ выразите в метрах.

Вариант 4

1. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)\,\dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,9) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,6, а оценка экспертов равна 0,45.

2. К источнику с ЭДС $E = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, определяется формулой $U = \dfrac{E \cdot R}{R + r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 10 В? Ответ выразите в омах.

3. Автомобиль, масса которого равна $m = 1200$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остаётся неизменным, и проходит за это время путь $s = 300$ метров. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, можно вычислить по формуле $F = \dfrac{2ms}{t^2}$. Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдёт указанный путь, если известно, что сила F, приложенная к автомобилю, не меньше 1800 Н. Ответ выразите в секундах.

4. Катер должен пересечь реку шириной $L = 45$ м и скоростью течения $u = 0{,}3$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \dfrac{L}{u} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 150 с?

5. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 200$ молей воздуха при давлении $p_1 = 1{,}1$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$A = \alpha\nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 9{,}15$ — постоянная, $T = 280$ К — температура воздуха, p_1 (атм.) — начальное давление, а p_2 (атм.) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более 1 537 200 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

§ 14. Планиметрия: площади фигур

14.1. Прямоугольный треугольник

Для вычисления сторон прямоугольного треугольника можно применять теорему Пифагора.

Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы c равен сумме квадратов катетов a и b:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов: $S = \frac{ab}{2}$.

На рисунке 135 приведены чертежи некоторых прямоугольных треугольников, у которых показаны катеты a и b.

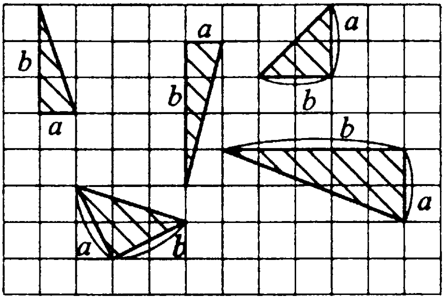


Рис. 135.

496. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 136). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

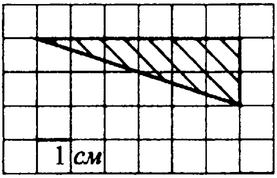


Рис. 136.

Теперь рассмотрим задачу, в которой точки изображены на **координатной плоскости**. Напомним, что любая точка на координатной плоскости характеризуется двумя числами — **координатами**. Первая координата называется **абсциссой (x)**, вторая координата называется **ординатой (y)**. На рисунке 137 точки A, B и C имеют координаты $A(4; 10)$, $B(0; 2)$, $C(8; 2)$.

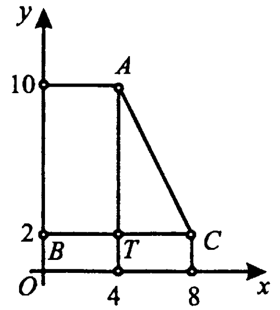


Рис. 137.

Посмотрим внимательно на рисунок 137. Если у двух точек одинаковые абсциссы (x), как у точек T и A, или одинаковые ординаты (y), как у точек B, T и C, то соответствующие отрезки параллельны осям координат. AT параллелен Oy, BC параллелен Ox. В таких случаях длину отрезка легко найти, если вычесть различающиеся координаты точек.

Например, найдём длину отрезка AT, где $A(4; 10)$, $T(4; 2)$. Абсциссы (x) у них равны. Найдём разность ординат (y), длина AT равна $10 - 2 = 8$.

Длину отрезка TC, параллельного оси Ox, можно найти, если вычесть их абсциссы: $8 - 4 = 4$.

Треугольник ATC является прямоугольным с катетами AT и TC.

$$S_{ATC} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot TC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16.$$

Длину AC найдём по теореме Пифагора. $AC^2 = TC^2 + AT^2$.

$$AC^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80. \quad AC = \sqrt{80}.$$

497. Найдите площадь треугольника (в см^2), вершины которого имеют координаты $(4; 2)$, $(6; 2)$, $(4; 10)$ (см. рис. 138).

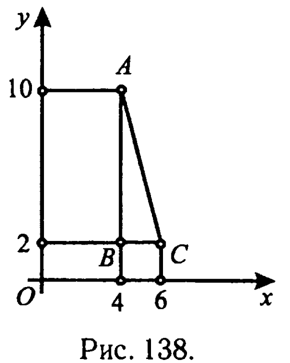


Рис. 138.

14.2. Треугольник

Площадь произвольного треугольника равна половине произведения длины его стороны a на высоту h, проведённую к этой стороне: $S = \frac{ah}{2}$.

На рисунке 139 приведены чертежи некоторых треугольников, у которых обозначены одна из сторон a и высота, проведённая к этой стороне h.

Как правило, удобно брать ту сторону, которая проходит по линиям клетчатой бумаги (или же проходит параллельно осям координат).

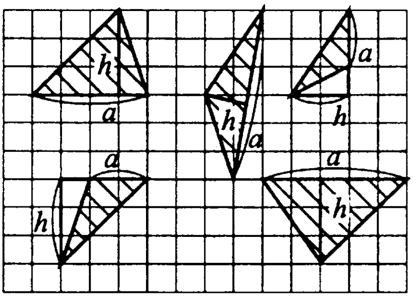


Рис. 139.

498. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён треугольник (см. рис. 140). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

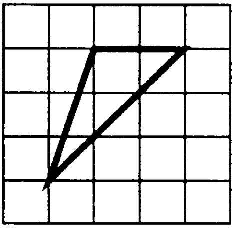


Рис. 140.

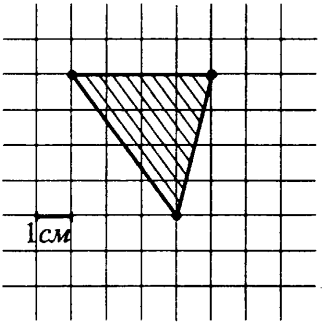


Рис. 141.

499. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 141). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

500. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 142). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

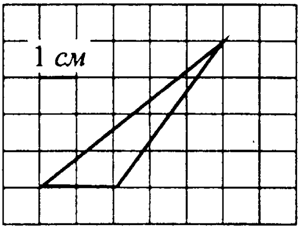


Рис. 142.

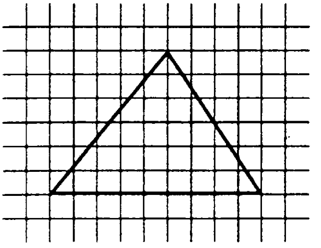


Рис. 143.

501. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 143). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

14.3. Прямоугольник

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон: $S = ab$.

На рисунке 144 приведены чертежи некоторых прямоугольников, у которых показаны смежные стороны a и b.

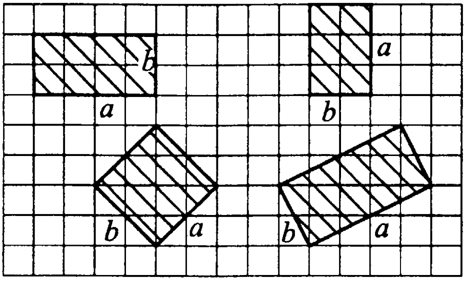


Рис. 144.

502. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён прямоугольник (см. рис. 145). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

503. Найдите площадь квадрата $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 146).

504. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 147).

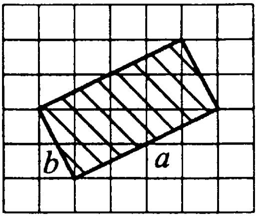


Рис. 145.

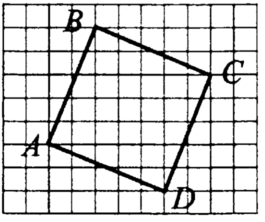


Рис. 146.

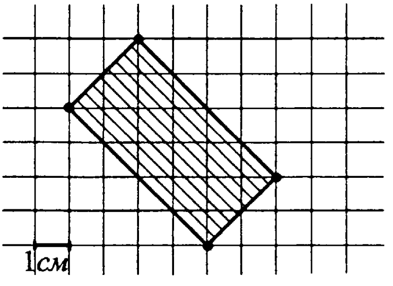


Рис. 147.

505. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 148). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

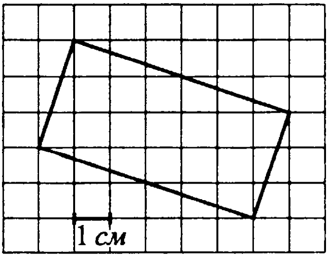


Рис. 148.

506. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 149, вершины которого имеют координаты (4; 0), (0; 6), (3; 8), (7; 2).

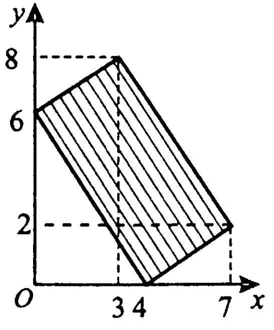


Рис. 149.

14.4. Трапеция

Напомним, что **трапеция** — это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований ($a+b$) на высоту (h):

$$S = \frac{(a+b)h}{2}.$$

На рисунке 150 приведены чертежи некоторых трапеций, у каждой из которых показаны основания a и b и высота h.

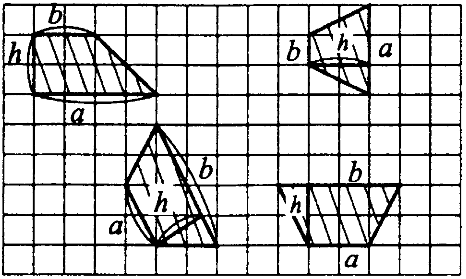


Рис. 150.

507. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 151). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

508. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 152). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

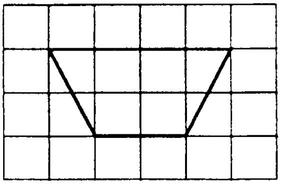


Рис. 151.

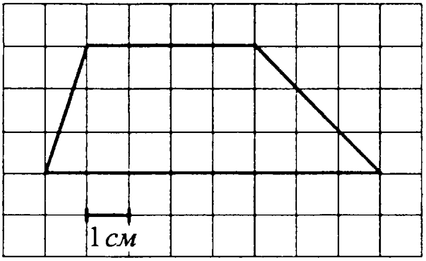


Рис. 152.

509. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (3; 1), (7; 1), (7; 7), (9; 7) (см. рис. 153).

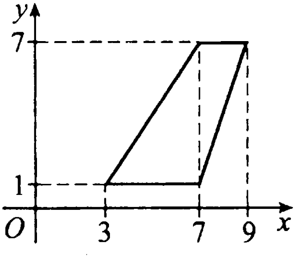


Рис. 153.

510. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 154.

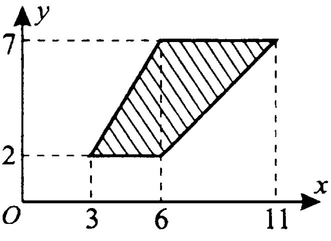


Рис. 154.

14.5. Ромб

Напомним, что **ромб** — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны и делятся пополам точкой пересечения.

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей: $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$.

На рисунке 155 приведены чертежи некоторых ромбов, у которых показаны диагонали.

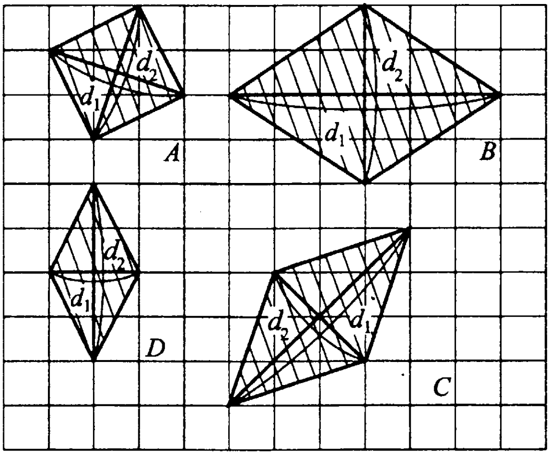


Рис. 155.

Обратите внимание, площади ромбов для рисунков B и D легко посчитать по этой формуле, а для рисунков A и C сначала придётся вычислить длины диагоналей. Например, для рисунка A длины диагоналей вычислим по теореме Пифагора: $d_1 = d_2 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $S_A = \dfrac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 5$.

На рисунках B и D диагонали каждого из ромбов проходят по линиям клеток, считаем их длину по рисунку. Диагонали ромба B равны 6 и 4, диагонали ромба D равны 2 и 4. Найдём их площади. $S_B = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$, $S_D = \dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4$.

511. Найдите площадь ромба на рисунке C (см. рис. 155).

512. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 156). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

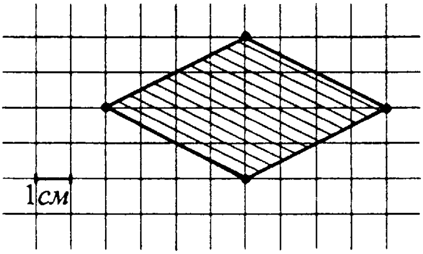


Рис. 156.

513. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 157). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

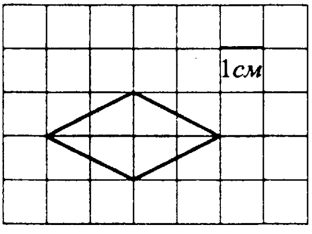


Рис. 157.

514. Найдите площадь закрашенной фигуры на координатной плоскости (см. рис. 158).

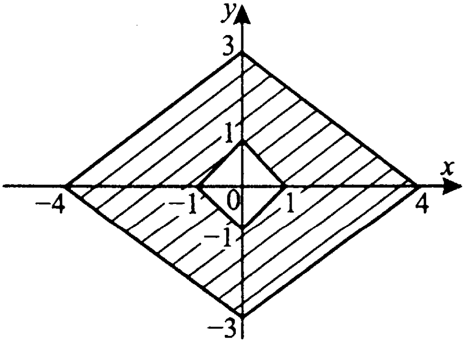


Рис. 158.

14.6. Произвольный многоугольник

Площадь произвольного многоугольника, изображённого на сетке, можно найти при помощи достраивания до прямоугольника. Этот метод можно также использовать для поиска площадей уже рассмотренных нами фигур: треугольника, прямоугольника, ромба, трапеции.

515. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 159). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

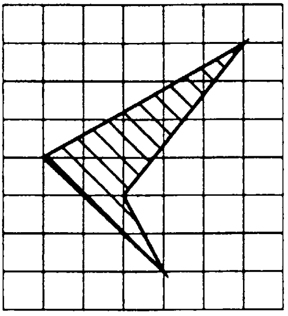


Рис. 159.

516. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 160). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

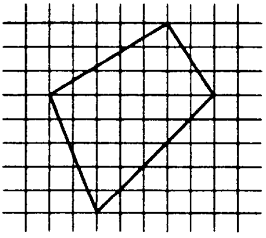


Рис. 160.

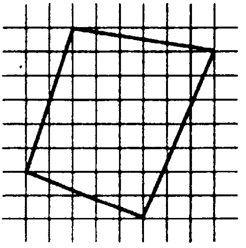


Рис. 161.

517. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 161). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

14. Зак. № 21

518. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 162).

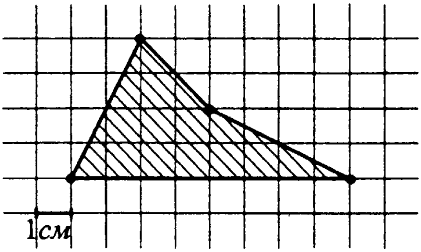


Рис. 162.

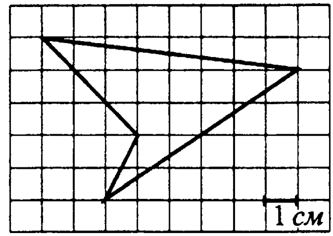


Рис. 163.

519. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 163). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

14.7. Круг и сектор

Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса: $S = \pi R^2$.

Площадь сектора с углом α градусов равна $\dfrac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$.

520. Найдите площадь S круга, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 164). В ответе укажите $\dfrac{S}{\pi}$.

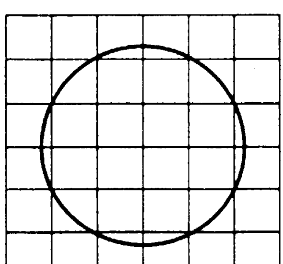


Рис. 164.

521. На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 9π. Найдите площадь S заштрихованной фигуры. В ответе запишите результат $\frac{S}{\pi}$ (см. рис. 165).

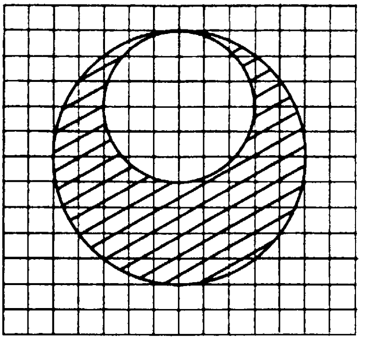


Рис. 165.

522. Найдите площадь S (в см^2) заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 166. В ответе укажите S/π.

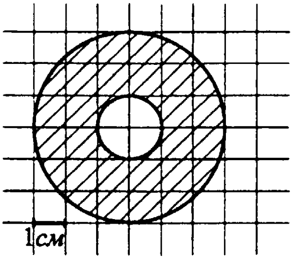


Рис. 166.

523. Найдите площадь S заштрихованных секторов на рисунках C и D, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 167). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

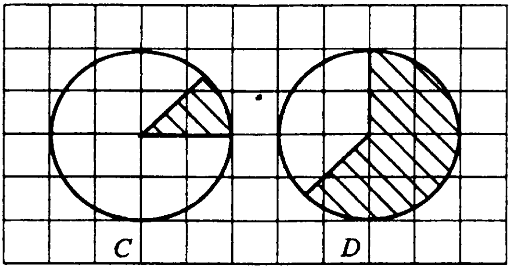


Рис. 167.

524. Найдите площадь фигуры (в см^2), изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см. В ответе запишите результат $\frac{S}{\pi}$ (см. рис. 168).

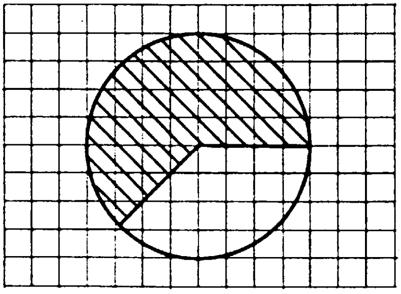


Рис. 168.

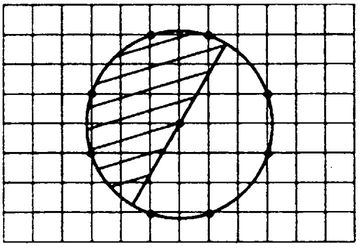


Рис. 169.

525. Найдите (в см^2) площадь S закрашенной фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$1 см (см. рис. 169). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображён треугольник (см. рис. 170). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

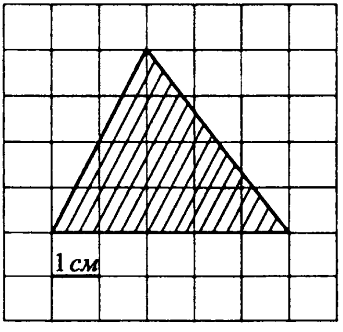


Рис. 170.

2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис. 171). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

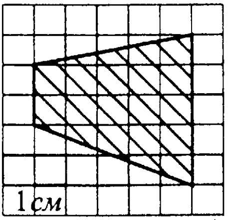


Рис. 171.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 172.

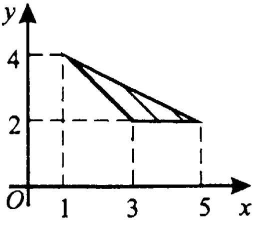


Рис. 172.

4. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 4), (5; 3), (3; 2) (см. рис. 173).

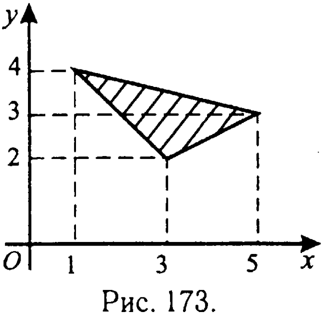


Рис. 173.

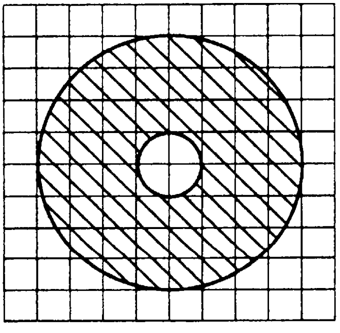


Рис. 174.

5. Найдите площадь S кольца, ограниченного окружностями, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 174). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

Вариант 2

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рис. 175). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

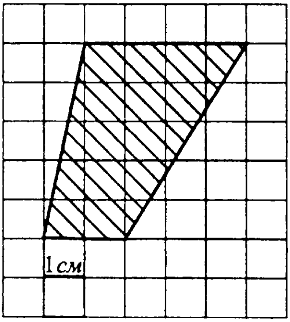


Рис. 175.

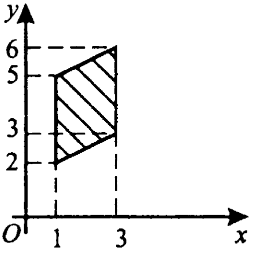


Рис. 176.

2. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(1; 2)$, $(1; 5)$, $(3; 3)$, $(3; 6)$ (см. рис. 176).

3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(1; 0)$, $(6; 3)$, $(5; 6)$, $(0; 3)$ (см. рис. 177).

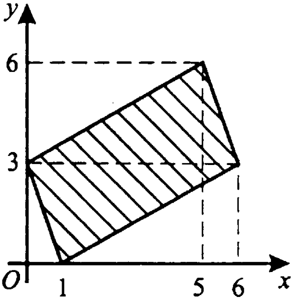


Рис. 177.

4. Найдите площадь S треугольника, считая стороны квадратных клеток равными 1 (см. рис. 178).

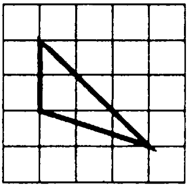


Рис. 178.

5. Найдите площадь S кольца, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 179). В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

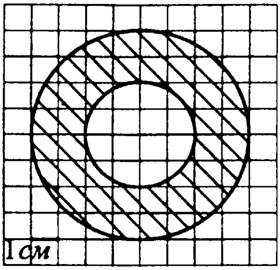


Рис. 179.

Вариант 3

1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображён треугольник (см. рис. 180). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

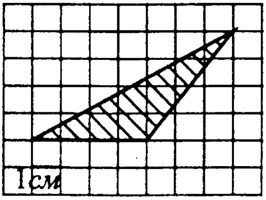


Рис. 180.

2. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 2), (3; 5), (6; 5), (6; 2) (см. рис. 181).

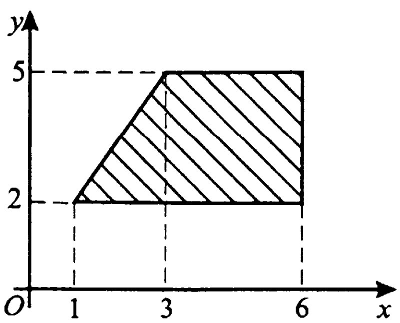


Рис. 181.

3. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 182.

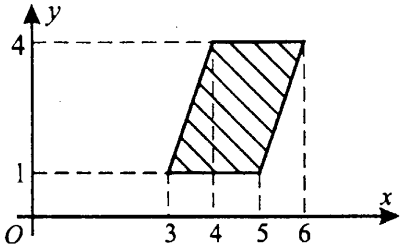


Рис. 182.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён прямоугольник (см. рис. 183). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

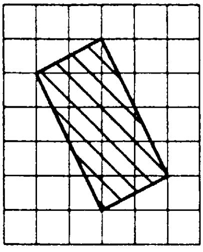


Рис. 183.

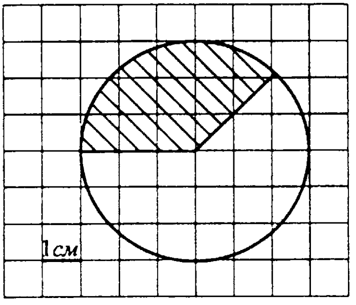


Рис. 184.

5. Найдите площадь S сектора, считая стороны клеток равными 1 (см. рис. 184). В ответе укажите $\dfrac{S}{\pi}$.

Вариант 4

1. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 185.

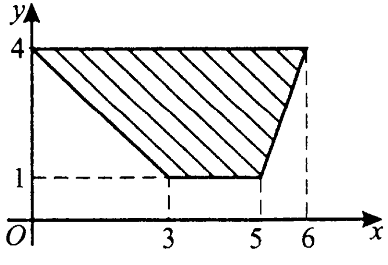


Рис. 185.

2. На рисунке 186 изображён треугольник. Найдите его площадь.

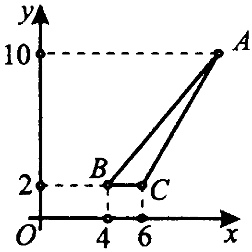


Рис. 186.

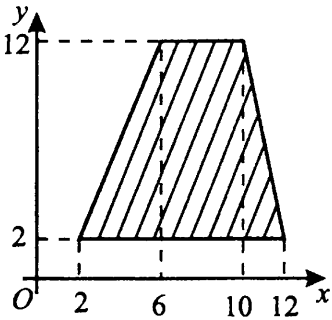


Рис. 187.

3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 2), (12; 2), (10; 12), (6; 12) (см. рис. 187).

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображён четырёхугольник (см. рис. 188). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

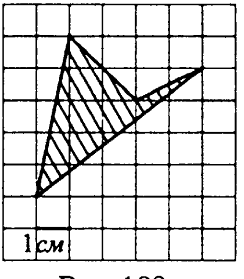


Рис. 188.

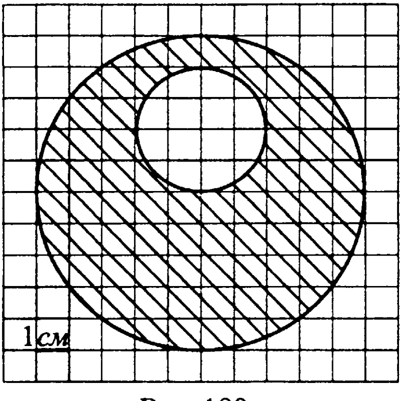


Рис. 189.

5. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображены две окружности (см. рис. 189). Найдите площадь S заштрихованной фигуры в квадратных сантиметрах. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.

§ 15. Планиметрия: углы и длины

15.1. Свойства треугольника

Сумма длин трёх сторон треугольника называется его **периметром**. $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой треугольника**.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника**.

Отрезок перпендикуляра, проведённого из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой треугольника**.

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. На рисунке 190 MN — средняя линия треугольника ABC.

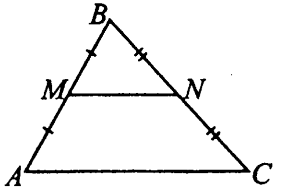


Рис. 190.

1. Средняя линия треугольника параллельна его стороне и равна половине этой стороны. $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

2. Средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника (см. рис. 191).

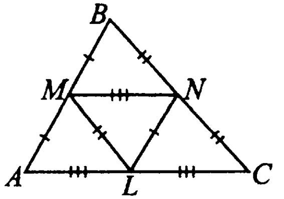


Рис. 191.

Сумма углов треугольника равна 180°. На рисунке 192 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

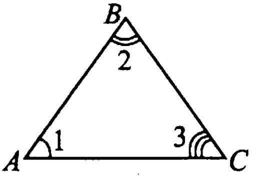


Рис. 192.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

Например, $\angle 4$ и $\angle 3$ — смежные, следовательно, $\angle 4$ — **внешний угол** треугольника ABC (см. рис. 193). Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Угол 4 — внешний угол треугольника ABC. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

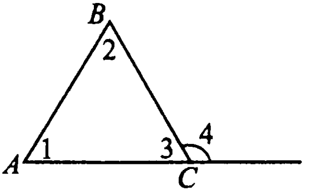


Рис. 193.

526. В треугольнике MPK угол P равен 35° (см. рис. 194), угол K равен 95°, MB — биссектриса, E — такая точка на MP, что $ME = MK$. Найдите угол PBE. Ответ дайте в градусах.

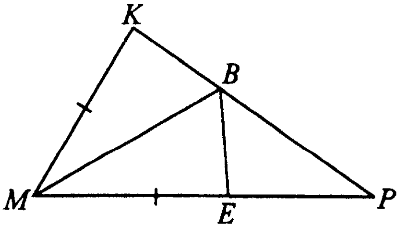


Рис. 194.

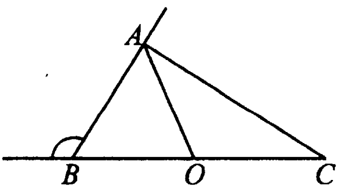


Рис. 195.

527. В прямоугольном треугольнике ABC внешний угол при вершине B равен 112°, $\angle C$ острый (см. рис. 195). Медиана AO пересекает сторону BC в точке O. Найдите угол AOC. Ответ выразите в градусах.

528. На рисунке 196 угол 1 равен 52°, угол 2 равен 26°, угол 3 равен 48°. Найдите угол 4. Ответ дайте в градусах.

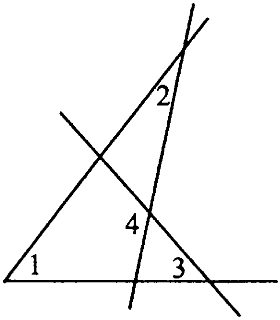


Рис. 196.

529. Острый угол прямоугольного треугольника равен 36° (см. рис. 197). Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника. Ответ дайте в градусах.

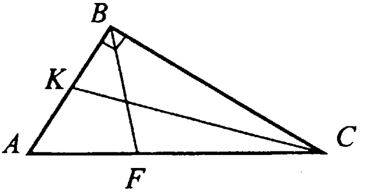


Рис. 197.

530. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC $\angle B = 36°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O (см. рис. 198). Найдите угол EOA. Ответ дайте в градусах.

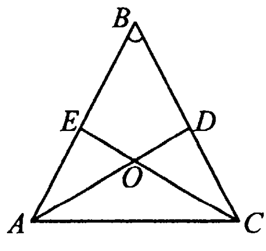


Рис. 198.

531. В треугольнике ABC угол A равен $62°$, угол B равен $76°$. AL, BN и CK — биссектрисы, пересекающиеся в точке O (см. рис. 199). Найдите угол AOK. Ответ дайте в градусах.

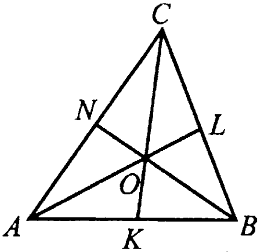


Рис. 199.

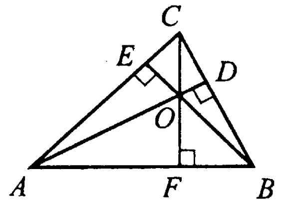


Рис. 200.

532. В треугольнике ABC угол A равен $44°$, угол B равен $72°$, AD, BE, CF — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите угол COE (см. рис. 200). Ответ дайте в градусах.

533. Один из внешних углов треугольника равен $85°$. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как $2 : 3$ (см. рис. 201). Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

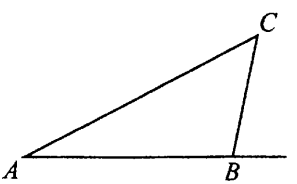


Рис. 201.

534. Один из внешних углов треугольника равен $56°$. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как $2 : 5$ (см. рис. 202). Найдите наибольший из них (в градусах).

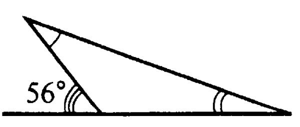


Рис. 202.

535. В треугольнике ABC угол A равен $48°$. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BD = BC$, $\angle ACD = 102°$. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах (см. рис. 203).

536. В треугольнике ABC $AB = BC = 8$, $\angle BAH = 60°$ (см. рис. 204). Найдите высоту AH.

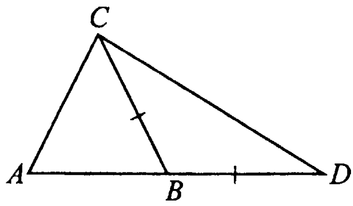


Рис. 203.

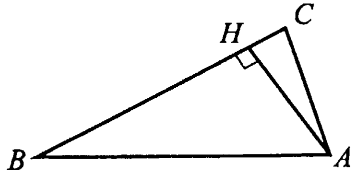


Рис. 204.

537. В треугольнике ABC угол C равен $108°$, биссектриса CD является перпендикуляром к AB (см. рис. 205). Найдите угол DBC. Ответ выразите в градусах.

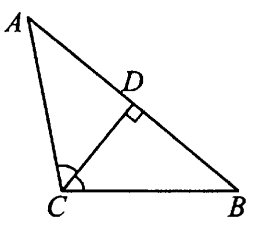


Рис. 205.

538. Найдите высоту треугольника ABC, опущенную на сторону BC (см. рис. 206), если стороны квадратных клеток равны $\sqrt{2}$.

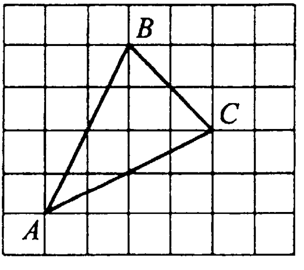


Рис. 206.

$\boxed{539.}$ Острые углы прямоугольного треугольника равны 39° и 51°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 207).

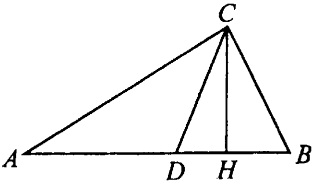


Рис. 207.

540. Острые углы прямоугольного треугольника равны 34° и 56°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла (см. рис. 208). Ответ дайте в градусах.

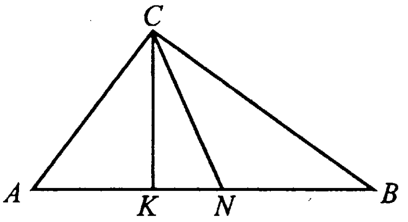


Рис. 208.

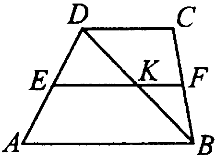


Рис. 209.

$\boxed{541.}$ Основания трапеции AB и DC равны 14 и 10 соответственно (см. рис. 209). Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции диагональ BD.

542. Средняя линия трапеции равна 22. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность которых равна 4. Найдите меньшее основание трапеции (см. рис. 210).

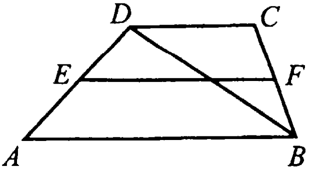


Рис. 210.

543. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к стороне, принадлежит противоположной стороне. Бóльшая сторона параллелограмма равна 14. Найдите меньшую сторону параллелограмма (см. рис. 211).

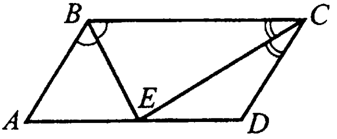


Рис. 211.

544. В ромбе $ABCD$ угол DBC равен 68° (см. рис. 212). Найдите угол DAB. Ответ дайте в градусах.

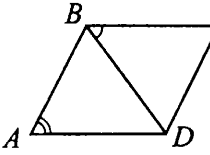


Рис. 212.

545. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 2 : 1, меньшая его сторона равна 5 (см. рис. 213). Найдите диагональ заданного прямоугольника.

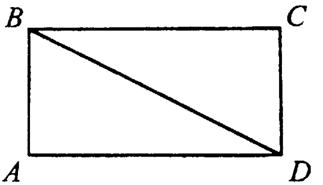


Рис. 213.

546. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 5 : 6, считая от вершины тупого угла (см. рис. 214). Найдите бóльшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 68.

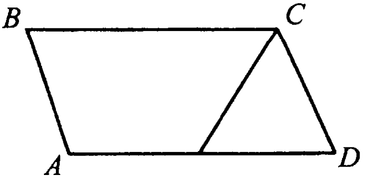


Рис. 214.

15.2. Окружность

Окружность — это множество точек плоскости, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки (центра).

Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности, называется **радиусом**.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной**. k — касательная (см. рис. 215).

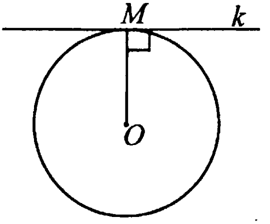


Рис. 215.

Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется **секущей**.

Свойства касательных и секущих

1°. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2°. Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через центр окружности и эту общую точку.

Пусть дана окружность с центром O, MP и MK — касательные, K и P — точки касания $\Longrightarrow MP = MK, \angle 1 = \angle 2, OP^2 + PM^2 = OM^2$ (см. рис. 216).

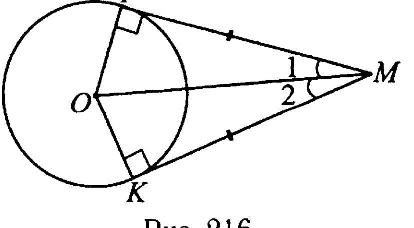


Рис. 216.

3°. Если касательная пересекается с секущей, то квадрат отрезка касательной равен произведению расстояний от общей точки прямых до точек пересечения секущей с окружностью.

Пусть дана окружность с центром O, MK — секущая, MP — касательная, P — точка касания $\Longrightarrow MP^2 = MK \cdot MK_1$ (см. рис. 217).

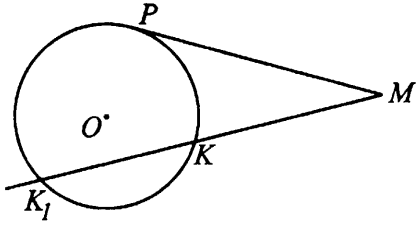


Рис. 217.

Хорда — это отрезок, концы которого лежат на окружности.

AB — хорда, $\smile AB$ — дуга (см. рис. 218).

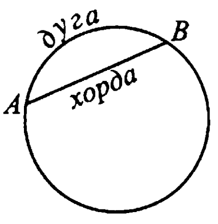


Рис. 218.

Дуга — это часть окружности, соединяющая две точки окружности (см. рис. 218).

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным углом**.

O — центр окружности, $\angle AOB$ — центральный угол, опирающийся на дугу BA (см. рис. 219).

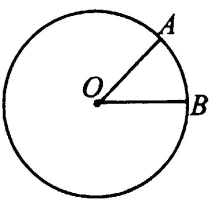


Рис. 219.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

Точки A, B, C лежат на окружности $\Longrightarrow \angle BAC$ — вписанный угол, опирающийся на дугу BC (см. рис. 220).

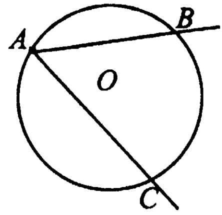


Рис. 220.

1°. Центральный угол равен величине дуги, на которую он опирается.

O — центр окружности, A и B лежат на окружности. $\angle AOB = \smile AB$ (см. рис. 219).

2°. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

$\angle BAC = \frac{1}{2}\smile BC$ (см. рис. 220).

3°. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

A, B, M, C лежат на окружности. $\angle ABC = \angle AMC$ (см. рис. 221).

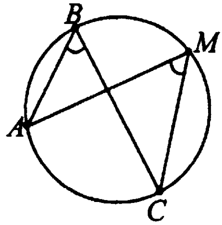


Рис. 221.

4°. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (на диаметр), равен 90° (см. рис. 222).

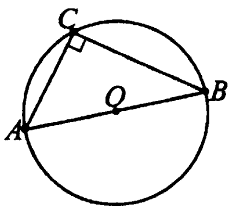


Рис. 222.

5°. Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

BA — хорда, BC — касательная $\Longrightarrow \angle ABC = \frac{1}{2}\smile AB$ (см. рис. 223).

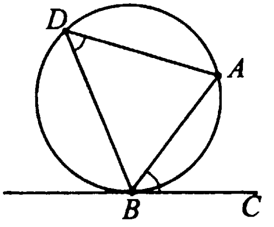


Рис. 223.

6°. Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, который опирается на дугу, заключённую между касательной и хордой.

BA — хорда, BC — касательная $\Longrightarrow \angle ABC = \angle ADB$ (см. рис. 223).

547. Найдите угол ACO, если прямая CA касается окружности в точке A, точка O — центр окружности, дуга AD окружности, заключённая внутри этого угла, равна 128° (см. рис. 224). Ответ дайте в градусах.

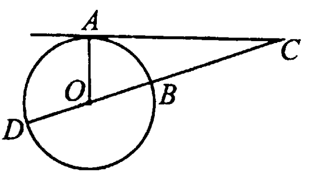


Рис. 224.

548. Хорда AB стягивает дугу окружности в 104°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах (см. рис. 225).

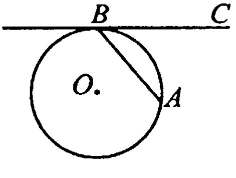


Рис. 225.

549. Найдите угол CBO, если сторона BC касается окружности, а меньшая дуга окружности AC, заключённая внутри этого угла, равна 67° (см. рис. 226). Ответ дайте в градусах.

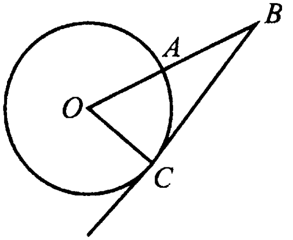


Рис. 226.

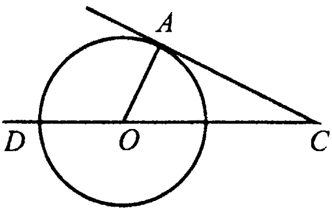


Рис. 227.

550. Угол ACO равен 38°. Его сторона CA касается окружности. Найдите градусную величину большей дуги (AD) окружности, заключённой внутри этого угла (см. рис. 227).

551. В окружности с центром O AB и CD — диаметры (см. рис. 228). Центральный угол AOD равен 108°. Найдите вписанный угол ABC. Ответ дайте в градусах.

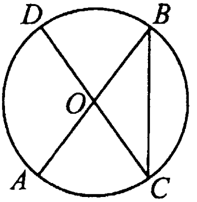


Рис. 228.

552. Найдите угол ACB, если вписанные углы AMB и MAK опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 106° и 42° (см. рис. 229). Ответ дайте в градусах.

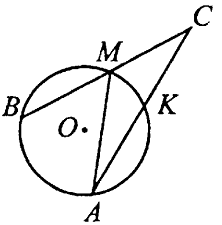


Рис. 229.

553. Вписанные углы BAD и ADC опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 22° и 58° (см. рис. 230). Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

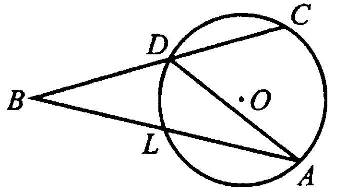


Рис. 230.

554. Угол ACB равен 26°. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек K и L, равна 80° (см. рис. 231). Найдите угол KAL. Ответ дайте в градусах.

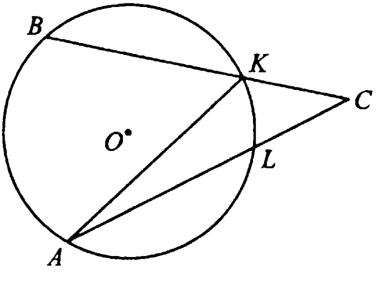


Рис. 231.

Описанные и вписанные окружности

Окружность называют **вписанной** в угол или многоугольник (в частности, в треугольник), если она касается всех сторон соответствующего угла или многоугольника (см. рис. 232).

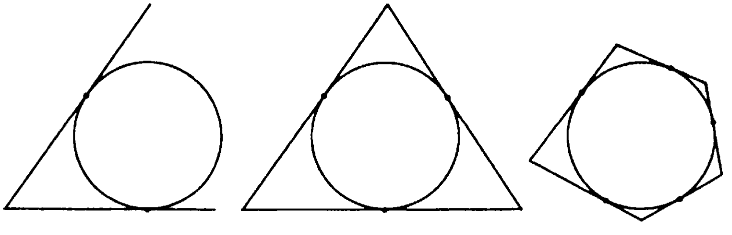


Рис. 232.

Окружность называют **описанной** вокруг многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности (см. рис. 233).

Рис. 233.

1°. Центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе угла.

Окружность с центром O вписана в угол $BAC \Longrightarrow \angle BAO = \angle CAO$ (см. рис. 234).

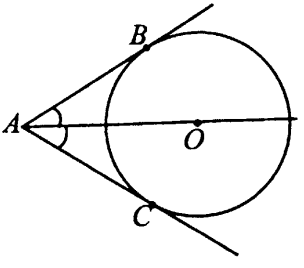


Рис. 234.

2°. Центр вписанной в многоугольник окружности лежит в точке пересечения его биссектрис.

В $\triangle ABC$ точка O — центр вписанной окружности $\Longrightarrow BO$, CO, AO — биссектрисы углов $\triangle ABC$ (см. рис. 235).

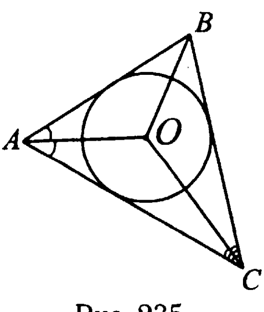


Рис. 235.

3°. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

Окружность вписана в четырёхугольник $ABCD \Longrightarrow$
$AD + BC = AB + DC$ (см. рис. 236).

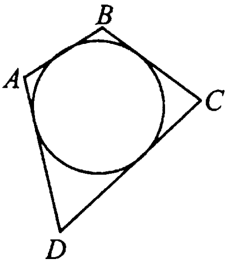


Рис. 236.

4°. Центр окружности, описанной около многоугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

$\triangle ABC$ вписан в окружность, O — центр (см. рис. 237).

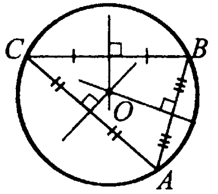


Рис. 237.

5°. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

$\triangle ABC$ вписан в окружность с центром O, $\angle B = 90° \Longrightarrow AO = OC$, точка O лежит на AC (см. рис. 238).

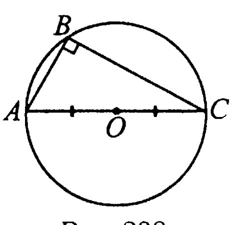


Рис. 238.

6°. Радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно вычислить по формуле $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

7°. Центры вписанной и описанной окружности правильного треугольника совпадают, центр лежит на высоте треугольника и делит её в отношении 2 : 1, считая от вершины.

8°. Если четырёхугольник вписан в окружность, суммы его противоположных углов равны 180°. $ABCD$ вписан в окружность (см. рис. 239). $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

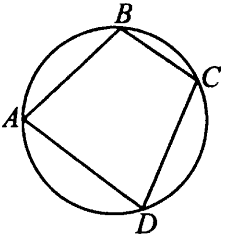


Рис. 239.

9°. Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная.

555. Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, являются вершинами четырёхугольника $ABCD$. Градусные величины углов A, B и D относятся соответственно как 5 : 2 : 6 (см. рис. 240). Найдите угол C четырёхугольника $ABCD$. Ответ дайте в градусах.

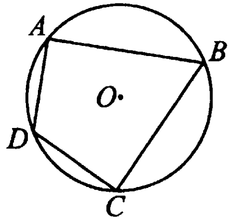


Рис. 240.

556. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 113°, угол DAC равен 52°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах (см. рис. 241).

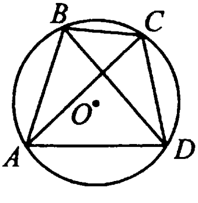


Рис. 241.

557. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 120° и 82° (см. рис. 242). Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

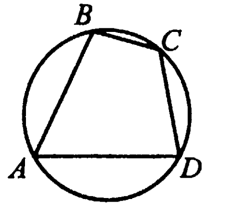


Рис. 242.

558. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 29° и 43°. Найдите больший из оставшихся углов (см. рис. 243). Ответ запишите в градусах.

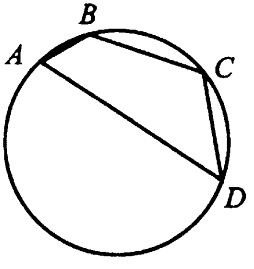


Рис. 243.

559. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 25, основание равно 30. Найдите радиус вписанной окружности (см. рис. 244).

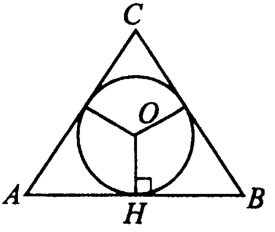


Рис. 244.

560. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $5\sqrt{3}$ (см. рис. 245). Найдите сторону этого треугольника.

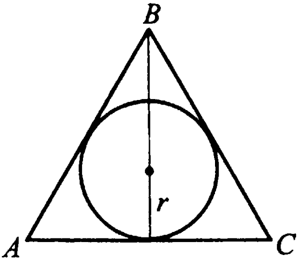


Рис. 245.

561. Сторона AB треугольника ABC равна 7. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника (см. рис. 246).

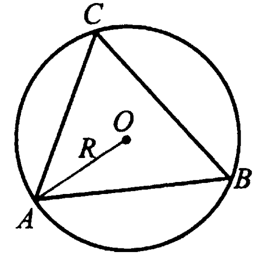


Рис. 246.

562. В равнобедренном треугольнике с основанием 6 и высотой, проведённой к основанию, равной 4, найдите радиус описанной окружности (см. рис. 247).

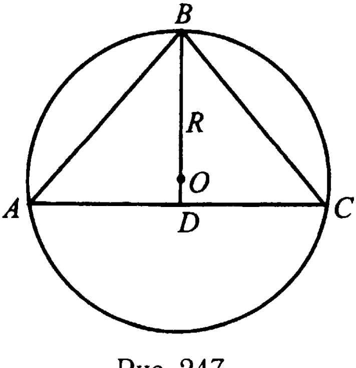


Рис. 247.

563. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 42, её бóльшая боковая сторона равна 12 (см. рис. 248). Найдите радиус окружности.

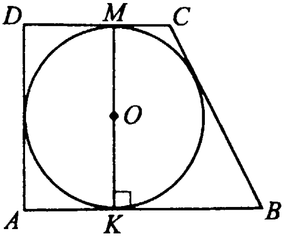


Рис. 248.

564. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 86, ее бóльшая боковая сторона равна 27 (см. рис. 249). Найдите радиус окружности.

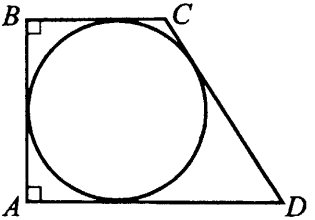


Рис. 249.

565. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 60 (см. рис. 250). Найдите её среднюю линию.

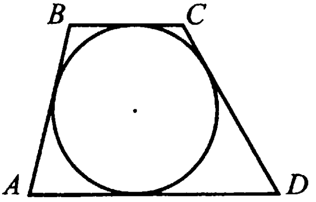


Рис. 250.

566. Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 12 (см. рис. 251).

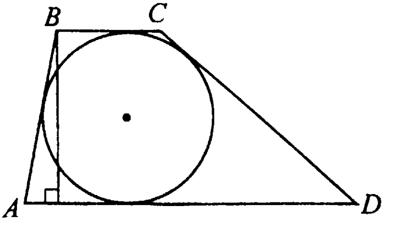


Рис. 251.

567. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 132, две его стороны (в последовательном порядке) равны 15 и 21 (см. рис. 252). Найдите бо́льшую из оставшихся сторон.

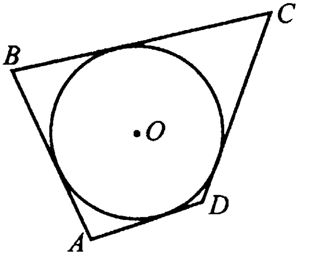


Рис. 252.

568. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как 4 : 7 : 9 (см. рис. 253). Найдите бо́льшую сторону этого четырёхугольника, если известно, что периметр его равен 338.

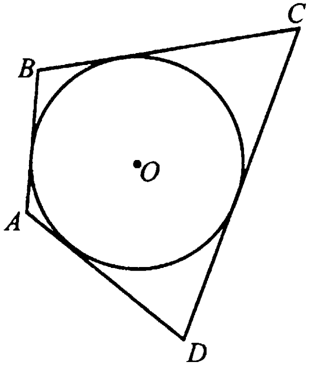


Рис. 253.

569. Меньшая сторона прямоугольника равна 12, угол между диагоналями равен 60°. Найдите радиус описанной окружности (см. рис. 254).

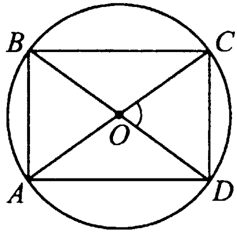


Рис. 254.

570. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 9 и $3\sqrt{7}$ (см. рис. 255).

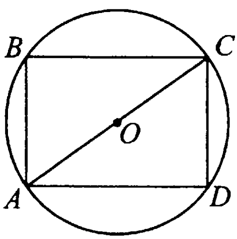


Рис. 255.

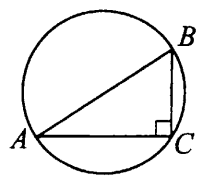


Рис. 256.

571. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 9 (см. рис. 256). Найдите гипотенузу этого треугольника.

Задания для контроля

Вариант 1

1. В треугольнике ABC угол A равен 38°, угол C равен 58°. На продолжении стороны AB отложен отрезок $BK = BC$. Найдите угол K треугольника BCK. Ответ дайте в градусах (см. рис. 257).

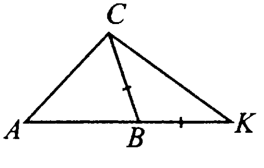


Рис. 257.

2. Угол ACO равен 32°. Его сторона CA в точке A касается окружности с центром в точке O. Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла (см. рис. 258). Ответ дайте в градусах.

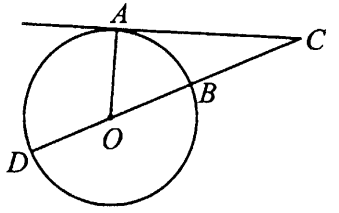


Рис. 258.

3. Хорда PK делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 11 : 7. Под каким углом видна эта хорда из точки M, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ дайте в градусах (см. рис. 259).

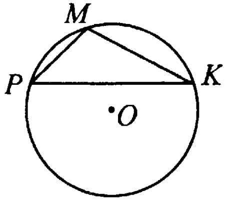


Рис. 259.

4. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 18 (см. рис. 260).

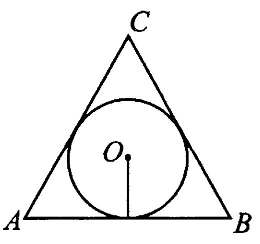


Рис. 260.

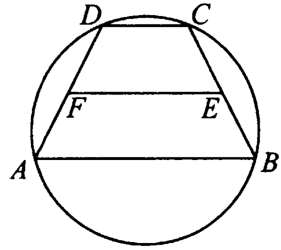


Рис. 261.

5. Около трапеции описана окружность (см. рис. 261). Периметр трапеции равен 142, средняя линия равна 50. Найдите боковую сторону трапеции.

15. Зак. № 21

Вариант 2

1. Один из внешних углов треугольника равен 72°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как 5 : 13. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах (см. рис. 262).

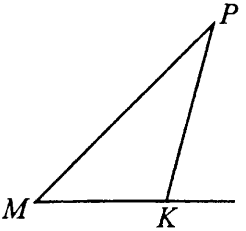


Рис. 262.

2. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 50°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах (см. рис. 263).

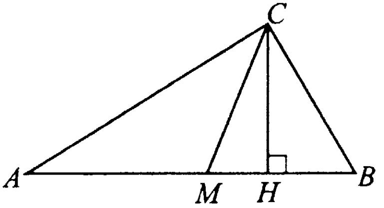


Рис. 263.

3. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности в точке A, O — центр окружности, а меньшая дуга окружности AB, заключённая внутри этого угла, равна 71°. Ответ дайте в градусах (см. рис. 264).

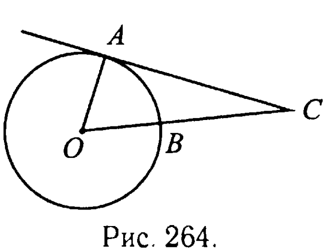


Рис. 264.

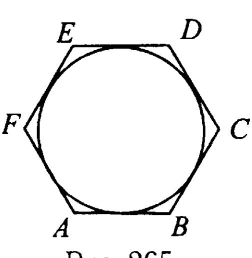


Рис. 265.

4. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен $5\sqrt{12}$ (см. рис. 265).

5. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной $5\sqrt{2}$ (см. рис. 266).

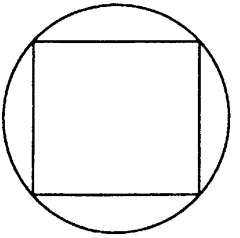


Рис. 266.

Вариант 3

1. Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 7. Найдите меньший из них. Ответ дайте в градусах.

2. Острые углы прямоугольного треугольника равны 27° и 63°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах (см. рис. 267).

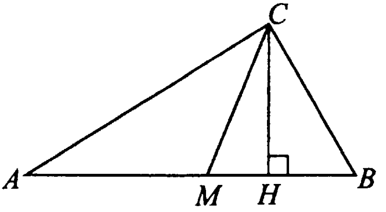


Рис. 267.

3. Хорда AB стягивает дугу окружности в 104°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах (см. рис. 268).

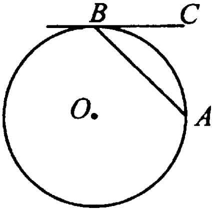


Рис. 268.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен $65°$, угол CAD равен $42°$. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах (см. рис. 269).

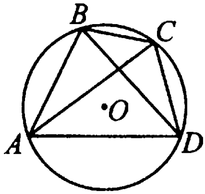


Рис. 269.

5. Три стороны описанного около окружности четырёхугольника относятся (в последовательном порядке) как $2 : 3 : 4$. Найдите бо́льшую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его периметр равен 36 (см. рис. 270).

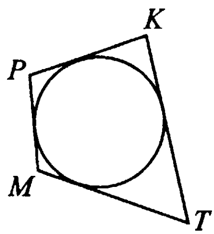


Рис. 270.

Вариант 4

1. В треугольнике MPK $MK = PK = 18\sqrt{3}$, угол K равен $120°$. Найдите высоту MH (см. рис. 271).

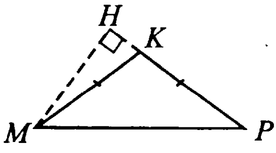


Рис. 271.

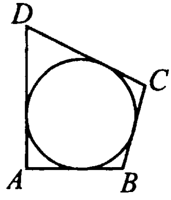


Рис. 272.

2. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 11$, $CD = 24$ (см. рис. 272). Найдите периметр четырёхугольника.

3. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 31°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах (см. рис. 273).

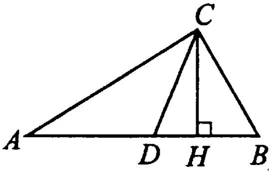


Рис. 273.

4. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника MPK, если стороны клеток равны 1 (см. рис. 274).

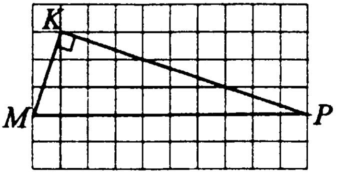


Рис. 274.

5. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, её бо́льшая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности (см. рис. 275).

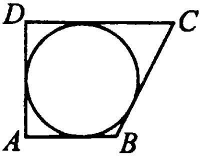


Рис. 275.

§ 16. Практические задания по планиметрии

При решении предлагаемых заданий следует использовать теоретические сведения из двух предыдущих параграфов, посвящённых планиметрии.

$\boxed{572.}$ Масштаб карты такой, что в одном сантиметре 0,5 км. Чему равно расстояние между городами A и B (в километрах), если на карте оно составляет 6 см?

573. На рисунке 276 показано, как выглядит колесо с 4 спицами. Сколько будет спиц в колесе, если угол между соседними спицами в нём будет равен 4°?

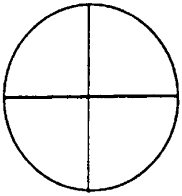


Рис. 276.

$\boxed{574.}$ Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 30 м и 60 м (см. рис. 277). Дом, расположенный на участке, также имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 6 м и 4 м. Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.

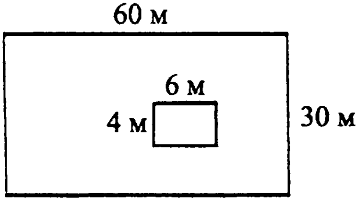


Рис. 277.

575. Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 20 м и 40 м (см. рис. 278). Дом, расположенный на участке, также имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 8 м и 5 м. Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.

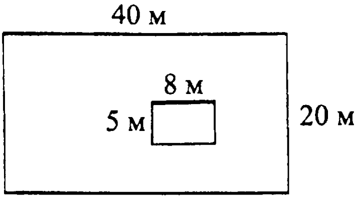


Рис. 278.

576. Частная спортивная площадка имеет форму прямоугольника со сторонами 30 метров и 35 метров (см. рис. 279). Хозяин планирует обнести её изгородью и отгородить такой же изгородью квадратный участок со стороной 20 метров. Найдите суммарную длину изгороди в метрах.

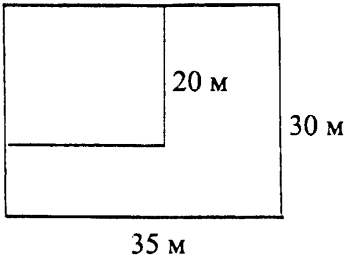


Рис. 279.

577. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 30 метров и 35 метров (см. рис. 280). Хозяин планирует обнести его изгородью и отгородить такой же изгородью квадратный участок со стороной 20 метров. Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.

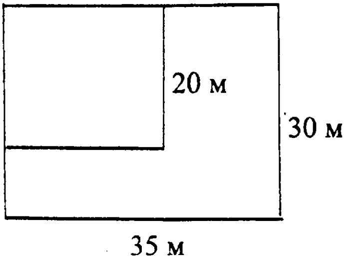


Рис. 280.

578. Участок земли под строительство санатория имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 1200 м и 600 м. Одна из больших сторон (см. рис. 281) идёт вдоль моря, а три остальные стороны нужно огородить забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.

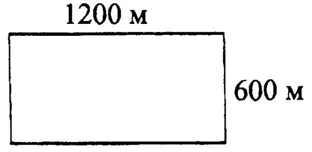


Рис. 281.

579. Участок земли под строительство санатория имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 1800 м и 750 м. Одна из больших сторон (см. рис. 282) идёт вдоль моря, а три остальные стороны нужно огородить забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.

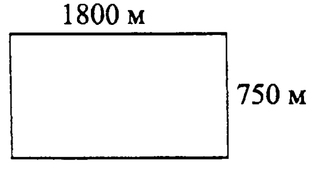


Рис. 282.

580. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 4 м и 3 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 30 см и 25 см. Сколько потребуется таких дощечек?

$\boxed{581.}$ От столба к палатке «Мороженое» натянут провод длиной 13 м, который закреплён на стене палатки на высоте 3 м от земли (см. рис. 283). Вычислите высоту столба, если расстояние от палатки до столба равно 12 м.

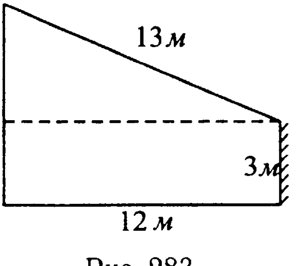


Рис. 283.

582. От столба высотой 12 м к дому натянут провод, который крепится на высоте 7 м от земли (см. рис. 284). Расстояние от дома до столба 12 м. Найдите длину провода. Ответ дайте в метрах.

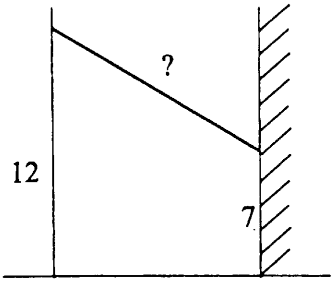


Рис. 284.

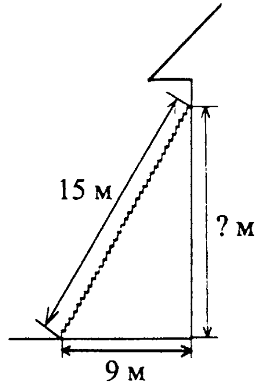


Рис. 285.

583. Пожарную лестницу длиной 15 м поставили к окну дома (см. рис. 285). Нижний конец лестницы отстоит от стены на 9 м. На какой высоте расположено окно? Ответ дайте в метрах.

584. Пожарную лестницу длиной 17 м поставили к окну дома (см. рис. 286). Нижний конец лестницы отстоит от стены на 8 м. На какой высоте расположено окно? Ответ дайте в метрах.

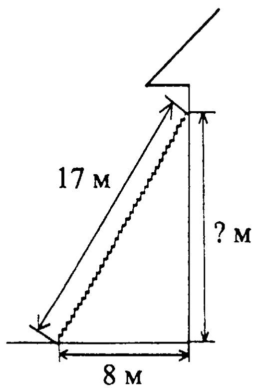


Рис. 286.

585. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 20 шагов от фонарного столба и отбрасывает тень длиной в 20 шагов. Определите высоту столба в метрах.

586. Человек, рост которого равен 2 м, стоит на расстоянии 4,5 м от уличного фонаря (см. рис. 287). При этом длина тени человека равна 1,5 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

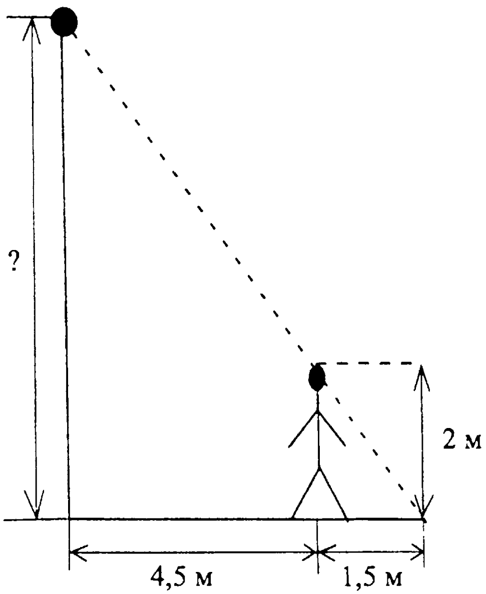


Рис. 287.

587. Детская горка укреплена вертикальным столбом, расположенным посередине спуска (см. рис. 288). Найдите высоту L этого столба, если высота H горки равна 7 метрам. Ответ дайте в метрах.

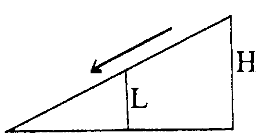


Рис. 288.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Квартира состоит из комнаты, коридора, кухни и санузла (см. рис. 289). Кухня имеет размеры 3 м × 3 м, санузел 2,5 м× 2 м, длина комнаты 6 м. Определите площадь коридора в квадратных метрах.

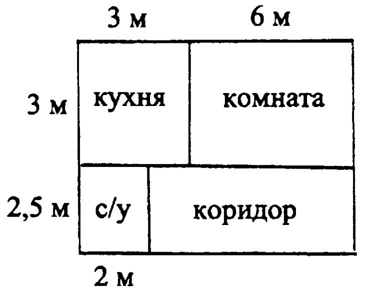


Рис. 289.

2. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 42 метра и 23 метра (см. рис. 290). Хозяин планирует обнести его забором и разделить таким же забором на две части, одна из которых имеет форму квадрата. Найдите общую длину забора в метрах.

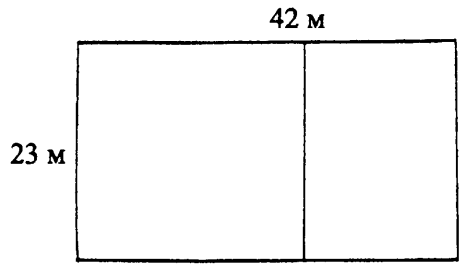


Рис. 290.

3. Перила лестницы дачного дома для надёжности укреплены посередине вертикальным столбом (см. рис. 291). Найдите высоту l этого столба, если наименьшая высота h_1 перил относительно земли равна 1,2 м, а наибольшая высота h_2 равна 2,4 м. Ответ дайте в метрах.

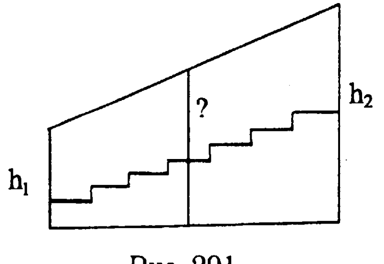


Рис. 291.

4. Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 180 см, а ширина — 144 см (см. рис. 292). Найдите высоту экрана. Ответ укажите в сантиметрах.

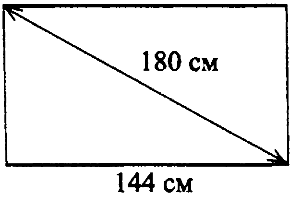


Рис. 292.

5. В квартире две прямоугольные комнаты. Размеры первой комнаты 7 м × 4 м, а размеры второй комнаты — 6 м × 5 м. Какая из этих комнат больше по площади? В ответ запишите площадь этой комнаты в квадратных метрах.

Вариант 2

1. На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 12,7 кв.м. Точные измерения показали, что ширина комнаты равна 3 м, а длина — 4,2 м (см. рис. 293). На сколько квадратных метров площадь комнаты отличается от значения, указанного на плане?

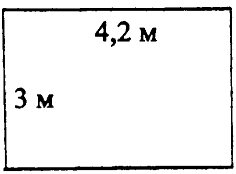


Рис. 293.

2. Участок земли имеет прямоугольную форму. Стороны прямоугольника равны 22 м и 40 м. Найдите длину забора (в метрах), которым нужно огородить участок, предусмотрев проезд шириной 3 м (см. рис. 294).

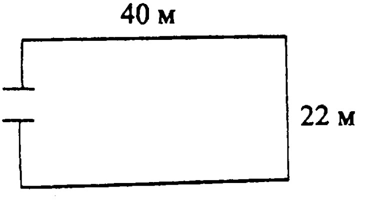


Рис. 294.

3. На рисунке 295 изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 4 м, а длинное плечо — 10 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 1 м?

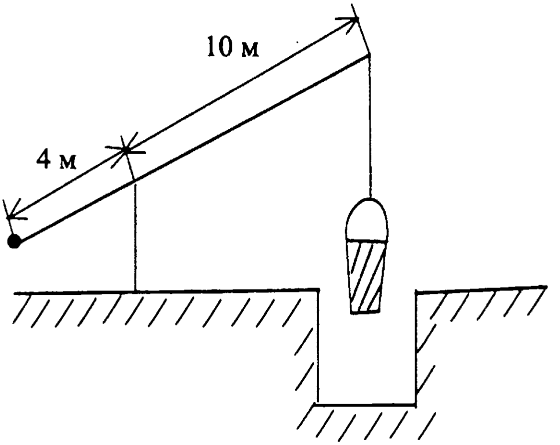


Рис. 295.

4. Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 250 см, а высота — 150 см (см. рис. 296). Найдите ширину экрана. Ответ укажите в сантиметрах.

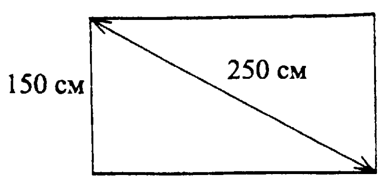


Рис. 296.

5. В спортивном центре два плавательных бассейна. Размеры первого бассейна 25 м $\times 10$ м, а размеры второго 20 м $\times$ 15 м. У какого из этих бассейнов площадь поверхности воды больше? В ответ запишите площадь этого бассейна в квадратных метрах.

Вариант 3

1. Масштаб карты такой, что в одном сантиметре 3,5 км. Чему равно расстояние между городами A и B (в километрах), если на карте оно составляет 8 см?

2. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 5 м и 8 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 10 см и 20 см. Сколько потребуется таких дощечек?

3. План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м× 1 м (см. рис. 297). Найдите площадь участка, выделенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.

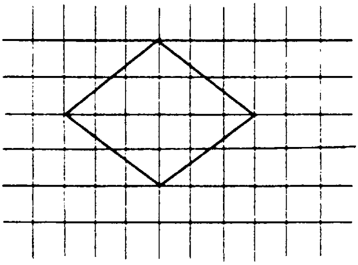


Рис. 297.

4. На рисунке 298 показано, как выглядит колесо с 4 спицами. Сколько будет спиц в колесе, если угол между соседними спицами в нём будет равен 9°?

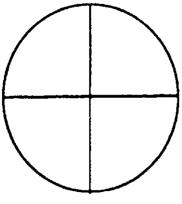


Рис. 298.

5. На местности расположены две прямоугольные спортивные площадки. Размеры первой площадки 20 м × 30 м, а размеры второй площадки 15 м × 35 м. Какая из этих спортивных площадок больше по площади? В ответ запишите площадь этой площадки в квадратных метрах.

Вариант 4

1. Масштаб карты такой, что в одном сантиметре 25 км. Чему равно расстояние на карте между городами A и B, если на местности оно равняется 750 км? Ответ укажите в сантиметрах.

2. Два садовода, имеющие прямоугольные участки размером 20 м на 40 м с общей границей, договорились и сделали общий круглый пруд площадью 120 квадратных метров (см. рис. 299), причём граница участков проходит точно через центр пруда. Какова площадь (в квадратных метрах) оставшейся части участка каждого садовода.

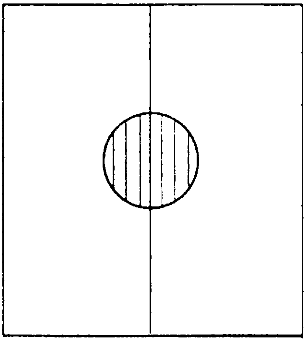


Рис. 299.

3. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 2 м и 3,3 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 8 см и 15 см. Сколько потребуется таких дощечек?

4. Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки в 20:00 (см. рис. 300)?

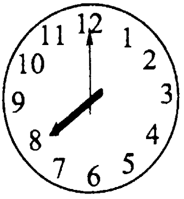


Рис. 300.

5. Участок земли для выпаса скота имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 300 м и 200 м. Одна из бо́льших сторон участка идёт вдоль озера, а три другие огорожены забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.

§ 17. Тригонометрия, координаты и векторы

17.1. Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C равен 90° (см. рис. 301).

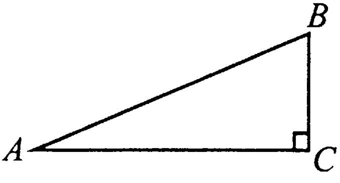


Рис. 301.

Стороны BC и AC называются **катетами**, сторона AB называется **гипотенузой**. Для угла A **прилежащий катет** AC (лежит на стороне угла), **противолежащий катет** BC.

Синусом угла называют отношение противолежащего катета к гипотенузе. Для нашего треугольника $\sin A = \frac{BC}{AB}$; $\sin B = \frac{AC}{AB}$.

Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. Для нашего треугольника $\cos A = \frac{AC}{AB}$; $\cos B = \frac{BC}{AB}$.

Обратите внимание, в одном и том же прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла, т.е. $\sin A = \cos B$, $\sin B = \cos A$.

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$; $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$.

Видно, что $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

Основное тригонометрическое тождество позволяет найти синус угла, если известен косинус этого угла, и наоборот.
$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, или для острого угла $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$;
$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$.

$\boxed{588.}$ В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 20$, $AC = 16$. Найдите $\sin A$.

589. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\cos A$, если $AB = 10\sqrt{2}$ и $AC = 7\sqrt{2}$.

590. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AC = 16$, $CB = 12$. Найдите $\sin B$.

591. В треугольнике ABC угол C прямой. Известно, что $BC = 8\sqrt{3}$ и $AC = 8$. Найдите $\cos A$.

592. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 8\sqrt{5}$, $CB = 11\sqrt{5}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

593. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = 0{,}28$. Найдите $\sin A$.

594. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

595. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, причём $\sin A = \dfrac{4}{9}$ и $BC = 3\sqrt{65}$. Найдите AC.

596. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = 3\sqrt{17}$ и $\operatorname{tg} A = 4$. Найдите AB.

597. Найдите тангенс угла CAB, изображённого на рисунке 302. В ответе укажите значение тангенса, умноженное на 3.

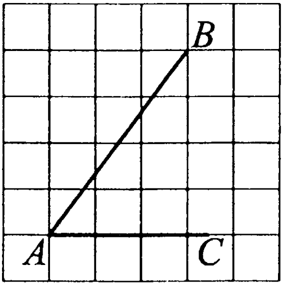


Рис. 302.

598. Найдите косинус угла MON. В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $3\sqrt{2}$ (см. рис. 303).

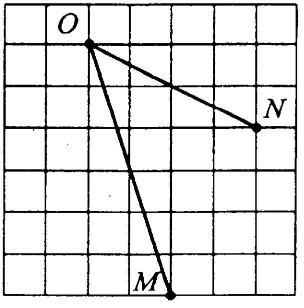


Рис. 303.

17.2. Высоты в прямоугольном треугольнике

В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с катетами. Третья высота, проведённая из вершины прямого угла, делит треугольник на два прямоугольных треугольника, углы которых равны соответственно углам исходного треугольника.

$\boxed{599.}$ В треугольнике ABC угол C равен $90°$, высота $CH = 2\sqrt{54}$, $BC = 15$. Найдите $\cos B$.

17.3. Равнобедренный треугольник

Равнобедренным треугольником называют треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называют боковыми, третью сторону называют основанием. Если в задаче дан равнобедренный треугольник, то пользуются его свойствами.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника (между равными сторонами), является медианой и биссектрисой.

$\boxed{600.}$ В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 24$, $\cos A = 0{,}6$. Найдите высоту CH.

601. В равнобедренном треугольнике ABC $BC = CA = 15$. Чему равна высота, опущенная на AB, если $\sin A = 0{,}9$?

602. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $BC = CA = 40$. Чему равна высота, опущенная на AB, если $\cos A = 0{,}28$?

603. В равнобедренном треугольнике ABC $BC = CA$, $AB = 7$, $\sin A = 0{,}96$. Найдите длину высоты CH.

604. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AB = 3$, $\operatorname{tg} A = 5$. Найдите высоту, опущенную на AB.

$\boxed{605.}$ В треугольнике ABC $AC = BC = 15$, $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите AB.

606. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AC и CB дано $AB = 3$ и $\cos A = 0{,}75$. Вычислите BC.

$\boxed{607.}$ В треугольнике ABC $AC = BC = 20$, $AB = 6\sqrt{39}$. Найдите $\sin A$.

608. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB = 32$ из вершины A опущена высота AK. Найдите $\cos A$, если $BK = 8$.

609. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB = 50$ известно, что высота, опущенная к BC, равна 48. Найдите $\cos A$.

17.4. Тригонометрические функции тупого угла

Рассмотрим развёрнутый угол BAK (см. рис. 304). Луч AP делит его на два смежных угла. Оказывается, синусы этих смежных углов равны, а косинусы противоположны (то есть отличаются только знаком).

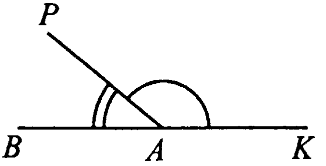


Рис. 304.

Например, если $\sin\angle BAP = 0{,}8$, то $\sin\angle PAK = 0{,}8$, $\cos\angle BAP = 0{,}6$ и $\cos\angle PAK = -0{,}6$.
Тангенсы смежных углов также противоположны.

610. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{10}{\sqrt{109}}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

611. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin B = \frac{\sqrt{91}}{10}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине B.

612. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin B = 0{,}4$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.

613. В параллелограмме $ABCD$ $\sin C = 0{,}8$ (см. рис. 305). Найдите $\cos D$.

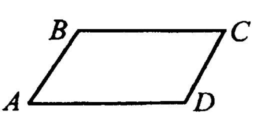


Рис. 305.

614. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, косинус внешнего угла при вершине A равен $-\frac{11}{\sqrt{157}}$, $BC = 2$. Найдите $3 \cdot AC$.

17.5. Координаты точек

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy (см. рис. 306).

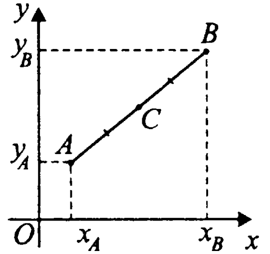


Рис. 306.

Длина отрезка AB, для которого известны координаты его концов $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$, определяется по формуле $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Координаты середины отрезка вычисляются по формулам: $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Если точки A и B симметричны относительно оси Ox (оси абсцисс), то их ординаты противоположны (см. рис. 307), а абсциссы равны: $A(x;\ y)$, $B(x;\ -y)$.

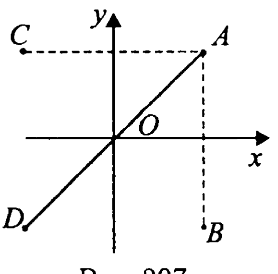


Рис. 307.

Если точки A и C симметричны относительно оси Oy, то их абсциссы противоположны, а ординаты равны: $A(x; y)$, $C(-x; y)$.

Если точки A и D симметричны относительно начала координат, то их координаты противоположны: $A(x;\ y)$, $D(-x;\ -y)$.

615. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(2; 5)$ относительно оси Oy (см. рис. 308).

616. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(3, 8)$ относительно начала координат (см. рис. 309).

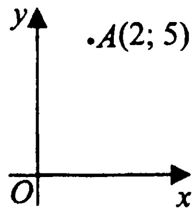


Рис. 308.

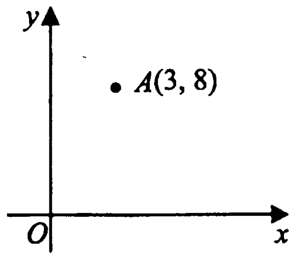


Рис. 309.

617. Точки $A(-1;-2)$, $B(4;-1)$, $C(6;5)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите абсциссу точки P пересечения его диагоналей (см. рис. 310).

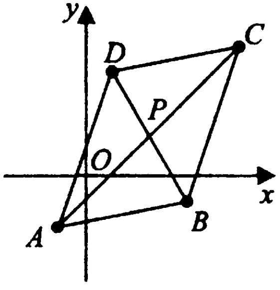


Рис. 310.

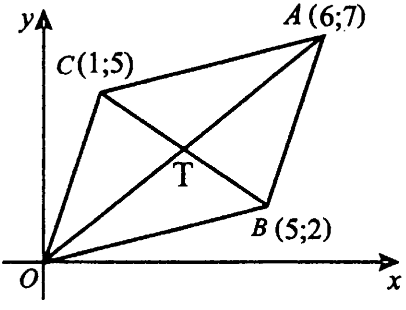


Рис. 311.

618. Точки $O(0;0)$, $A(6;7)$, $B(5;2)$, $C(1;5)$ являются вершинами четырёхугольника. Найдите ординату точки T пересечения его диагоналей (см. рис. 311).

619. Точки $O(0;0)$, $B(8;2)$, $C(0;8)$ являются вершинами параллелограмма (см. рис. 312). Найдите ординату точки M.

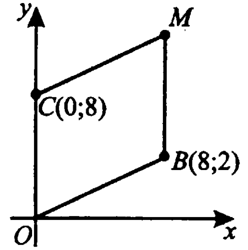


Рис. 312.

620. Точки $O(0;0)$, $A(16;12)$, $B(6;8)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 313).

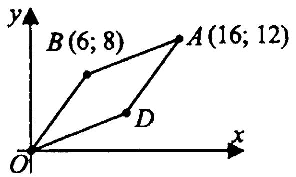


Рис. 313.

17.6. Векторы

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом, называется **вектором**.

Вектор характеризуется модулем (длиной отрезка) и направлением. Два вектора, имеющие одинаковые модули и направления, равны.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают $\overrightarrow{AB}$ или строчной (маленькой) буквой, например $\vec{a}$ (см. рис. 314).

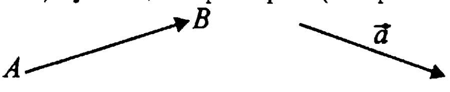


Рис. 314.

Модуль (длину) вектора обозначают $|\overrightarrow{AB}|$.

Сумма векторов — это вектор, который можно получить двумя способами (см. рис. 315). Заметим, что для любых точек A, B и C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

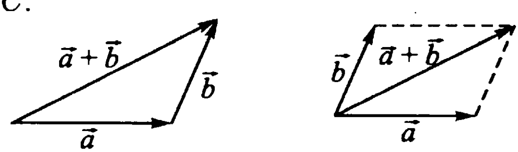


Рис. 315.

Разность векторов тоже можно получить двумя способами: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ или $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (см. рис. 316).

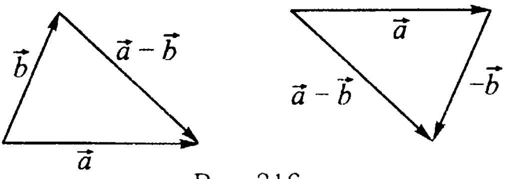


Рис. 316.

Координаты вектора

Пусть точки A и B имеют координаты $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по формуле $x = x_B - x_A$, $y = y_B - y_A$.

Длина вектора, или модуль вектора $\overrightarrow{AB}\{x;\ y\}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Заметим, что если ввести координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, что длины этих векторов равны 1, а направление вектора $\vec{i}$ совпадает с направлением оси Ox, вектора $\vec{j}$ — оси Oy, то любой вектор $\vec{a}$ на координатной плоскости можно представить в виде разложения $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где числа x, y называют координатами вектора $\vec{a}$. Обычно записывают $\vec{a}\{x;\ y\}$ или $\vec{a}(x;\ y)$.

Координаты суммы и разности векторов $\vec{a}\{x_a;\ y_a\}$ и $\vec{b}\{x_b;\ y_b\}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\{x_c;\ y_c\},\ x_c = x_a + x_b,\ y_c = y_a + y_b.$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{p}\{x_p;\ y_p\},\ x_p = x_a - x_b,\ y_p = y_a - y_b.$$

Для параллелограмма известно, что его противоположные стороны равны и параллельны. Например, для параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 317) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, так как $AB = CD$ и $AB \parallel CD$.

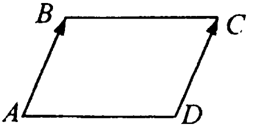


Рис. 317.

Диагонали параллелограмма пересекаются в середине диагоналей, поэтому $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ (см. рис. 318).

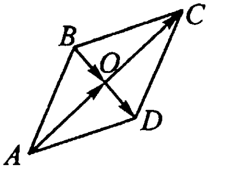


Рис. 318.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a}\{x_a;\ y_a\}$, $\vec{b}\{x_b;\ y_b\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$.

621. Стороны правильного треугольника KNP равны 10 (см. рис. 319). Найдите длину вектора $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KP}$.

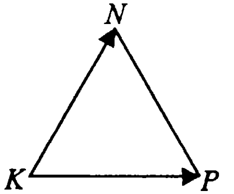


Рис. 319.

622. Диагонали ромба $ABCD$ равны 60 и 80 (см. рис. 320). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

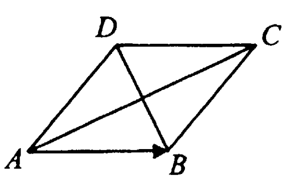


Рис. 320.

623. Диагонали ромба $ABCD$ равны 15 и 10 (см. рис. 321). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

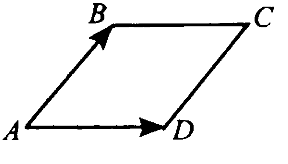


Рис. 321.

624. Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$ (см. рис. 322).

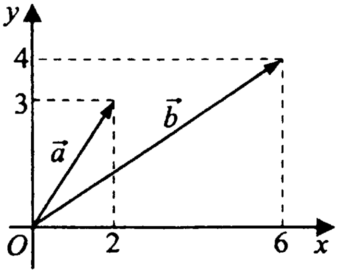


Рис. 322.

625. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 5. Диагонали пересекаются в точке O (см. рис. 323). Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

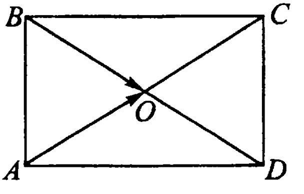


Рис. 323.

626. Стороны правильного треугольника MKN равны 10 (см. рис. 324). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{KN}$ и $\overrightarrow{KM}$.

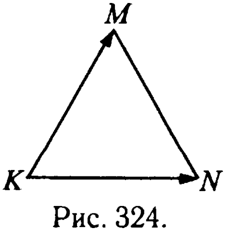


Рис. 324.

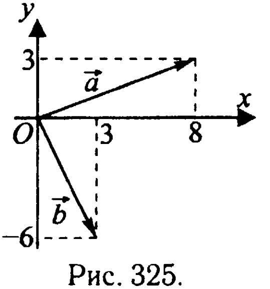


Рис. 325.

627. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 325).

628. Стороны правильного треугольника MKP равны 14. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MP}$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AC = 3$, $AB = 5$. Найдите $\sin B$.

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, причём известно, что $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$, $AC = 3$. Найдите AB.

3. Найдите основание AB равнобедренного треугольника ABC, если $AC = 7$, $\cos A = 0{,}125$.

4. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(-6; 4)$ и $B(4; 16)$.

5. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 326).

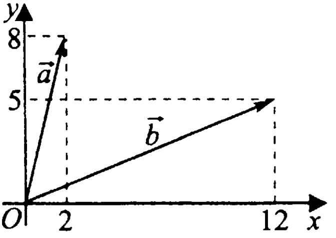


Рис. 326.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = \sqrt{17}$, $AB = 17$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $BC = 2{,}25$ и $\sin A = \frac{9}{13}$. Найдите длину гипотенузы.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AB = 11\sqrt{11}$ и $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Найдите AC.

4. Точки $O(0;0)$, $A(8;6)$, $B(3;4)$ и D являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки D (см. рис. 327).

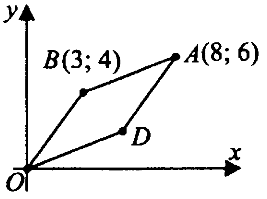


Рис. 327.

5. Стороны правильного треугольника MKP равны 12 (см. рис. 328). Найдите длину вектора $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MP}$.

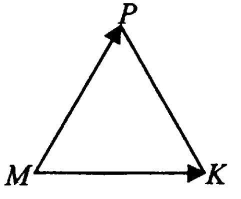


Рис. 328.

Вариант 3

1. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите $\cos B$, если $AB = 20$, $AC = 2\sqrt{19}$.

2. Дан острый угол α, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Вычислите $\cos\alpha$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 8\sqrt{58}$ известен $\operatorname{tg} A = \frac{3}{7}$. Найдите AC.

4. Найдите ординату точки, симметричной точке $B(6;-2)$ относительно оси абсцисс (см. рис. 329).

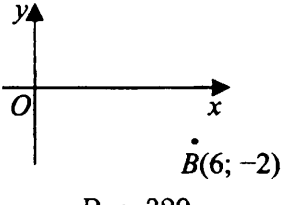


Рис. 329.

5. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 15 и 6 (см. рис. 330). Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

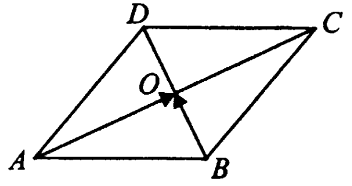


Рис. 330.

Вариант 4

1. В прямоугольном треугольнике ABC даны длины катета $AC = \sqrt{19}$ и гипотенузы $AB = 10$. Найдите $\sin A$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{2}$. Найдите AC, если $BC = 2{,}8$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите BC, если $\sin A = \frac{3}{4}$, $AC = 8\sqrt{7}$.

4. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки $A(6; 4)$ и $B(14; -2)$.

5. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 12 и 16 (см. рис. 331). Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Рис. 331.

§ 18. Параллелепипед, призма, пирамида

18.1. Прямоугольный параллелепипед

Объём прямоугольного параллелепипеда («кирпича», см. рис. 332) равен произведению трёх его измерений: $V = abc$.

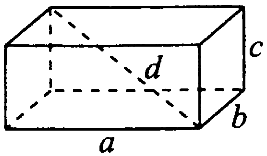


Рис. 332.

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна сумме площадей его шести граней: $S = 2(ab + bc + ac)$.

Диагональю прямоугольного параллелепипеда называют отрезок, соединяющий его противоположные вершины. Квадрат длины этого отрезка равен сумме квадратов трёх измерений параллелепипеда:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Если все три измерения прямоугольного параллелепипеда равны, то такой параллелепипед называется **кубом** (см. рис. 333).

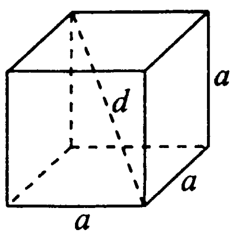


Рис. 333.

Для куба формулы объёма, площади и длины диагонали имеют вид

$$V = a^3, \quad S = 6a^2, \quad d = a\sqrt{3}.$$

629. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 334 (все двугранные углы многогранника прямые).

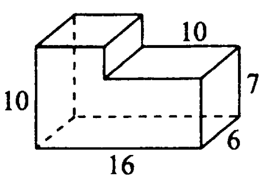


Рис. 334.

630. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке 335 (все двугранные углы многогранника прямые).

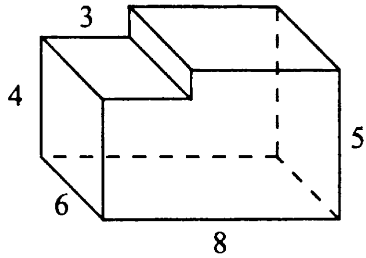


Рис. 335.

631. В единичном кубе вырезали прямую призму, в основании которой квадрат со стороной 0,2. Боковое ребро призмы равно 1 (см. рис. 336). Найдите объём оставшейся части куба.

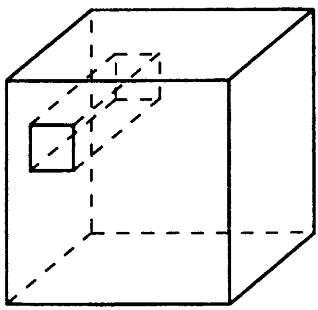


Рис. 336.

632. Найдите объём пространственного креста, изображённого на рисунке 337, если все изображённые двугранные углы прямые.

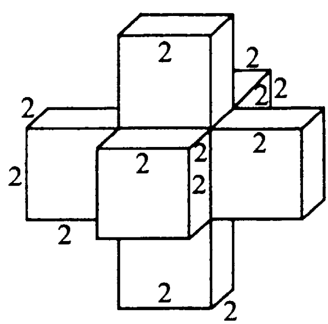


Рис. 337.

633. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 5, 8, 25. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму этого параллелепипеда (см. рис. 338).

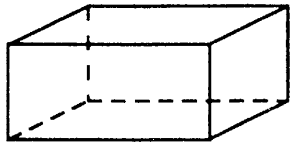


Рис. 338.

634. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и K_2 многогранника, изображённого на рисунке 339. Все двугранные углы многогранника прямые.

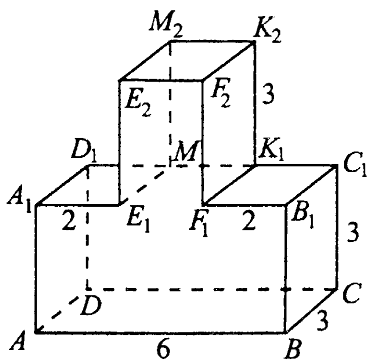


Рис. 339.

635. Найдите квадрат расстояния между вершинами A_1 и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 340.

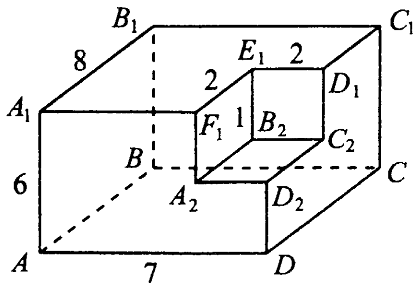


Рис. 340.

636. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 341. Все двугранные углы многогранника прямые.

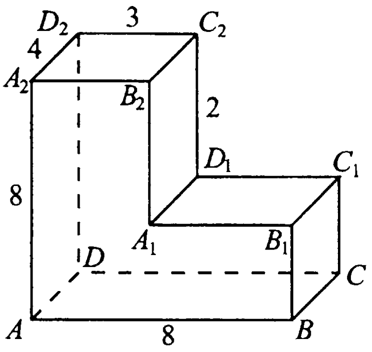


Рис. 341.

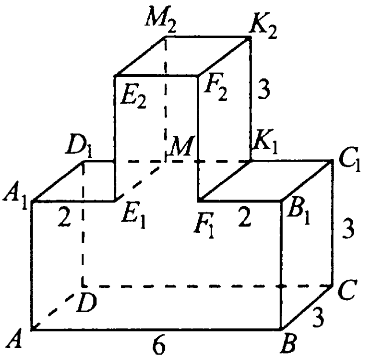


Рис. 342.

637. Найдите тангенс угла F_2AB многогранника, изображённого на рисунке 342. Все двугранные углы многогранника прямые.

638. Найдите угол AED_2 многогранника, изображённого на рисунке 343. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

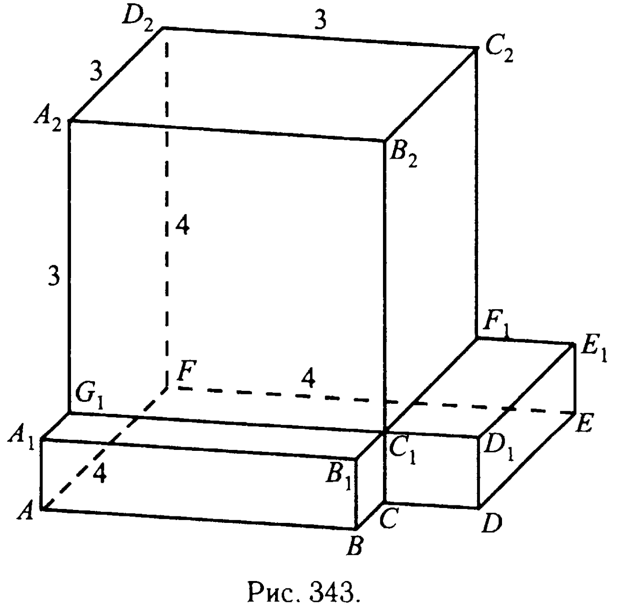


Рис. 343.

639. Найдите тангенс угла CDC_3 многогранника, изображённого на рисунке 344. Все двугранные углы многогранника прямые.

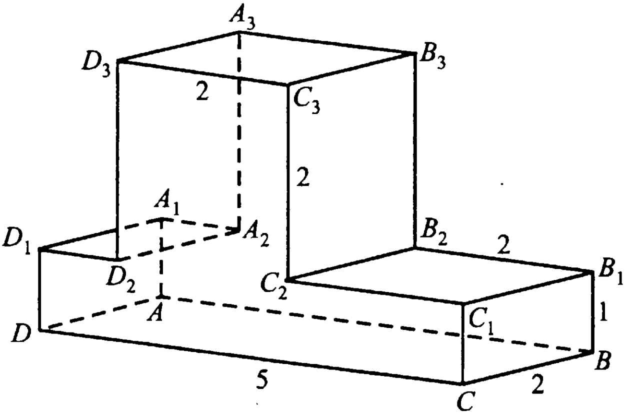


Рис. 344.

640. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 345 (все двугранные углы прямые).

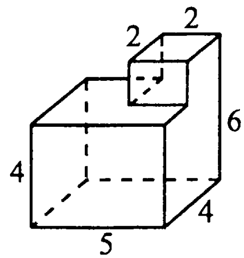


Рис. 345.

641. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 346 (все двугранные углы прямые).

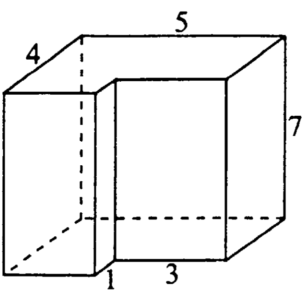


Рис. 346.

642. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 347 (все двугранные углы прямые).

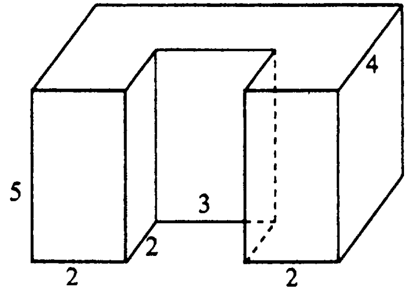


Рис. 347.

643. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке 348 (все двугранные углы прямые).

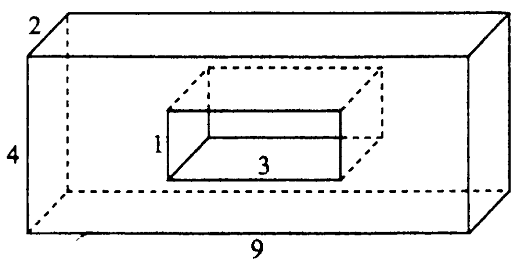


Рис. 348.

644. Из куба со стороной $\sqrt{12}$ вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром $\sqrt{12}$ (см. рис. 349). Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.

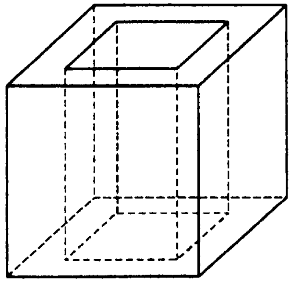


Рис. 349.

645. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 5. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 62. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

646. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 5 и 6. Объём параллелепипеда равен 480. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины (см. рис. 350).

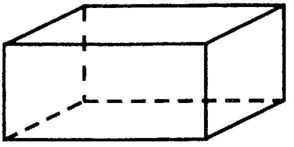


Рис. 350.

647. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 15 и 42. Диагональ параллелепипеда равна 45. Найдите площадь боковой поверхности.

648. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объём этого параллелепипеда равен 36. Найдите диагональ параллелепипеда.

649. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует углы 30°, 30°, 45° с плоскостями граней параллелепипеда. Объём параллелепипеда равен $27\sqrt{2}$. Найдите длину диагонали.

650. Диагональ куба равна $\sqrt{48}$ (см. рис. 351). Найдите его объём.

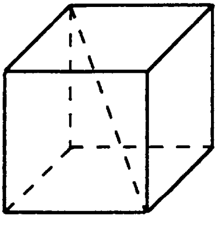


Рис. 351.

651. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BB_1 и A_1D. Ответ дайте в градусах.

652. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то площадь его поверхности увеличится на 90. Найдите ребро куба.

653. Если каждое ребро куба увеличить на 4, то площадь его поверхности увеличится на 264 (см. рис. 352). Найдите ребро исходного куба.

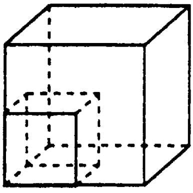


Рис. 352.

18.2. Параллелепипед и призма

Объём параллелепипеда и призмы (см. рис. 353) может быть найден как произведение площади основания на высоту:

$$V = S_{\text{осн.}}h.$$

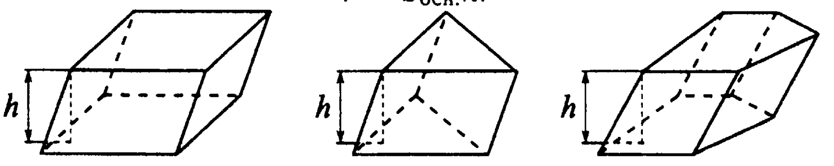


Рис. 353.

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту:

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}}h.$$

Площадь всей поверхности призмы равна сумме площади боковой поверхности и удвоенной площади основания (так как площади обоих оснований одинаковы):

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Если призма прямая (см. рис. 354), то формулы остаются прежними, но высота прямой призмы равна её боковому ребру. Напомним, что в прямой призме боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания. В частности, любая правильная призма является прямой (но в основании правильной призмы к тому же обязательно лежит правильный многоугольник).

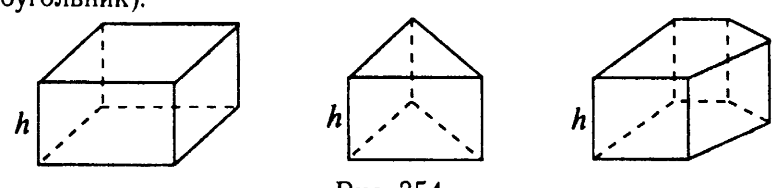
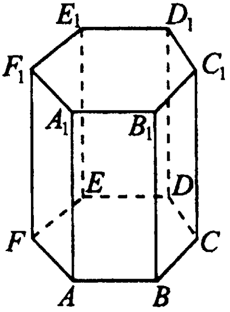


Рис. 354.

В правильной шестиугольной призме основание является правильным шестиугольником. Обозначив сторону этого шестиугольника через a, получаем следующие соотношения (см. рис. 355):



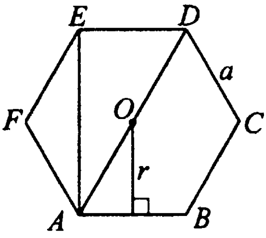


Рис. 355.

$S_{\text{основания}} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$,

$AD = 2a$, $AE = a\sqrt{3}$, $\angle EAD = 30°$, $\angle EFA = 120°$,

радиус описанной окружности $AO = a$,

радиус вписанной окружности $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

654. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 600 см^3 воды (см. рис. 356) и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 12 см до отметки 16 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

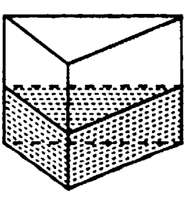


Рис. 356.

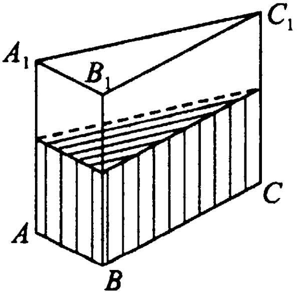


Рис. 357.

655. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду (см. рис. 357). Уровень воды достигает 18 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же по форме сосуд, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в см.

656. Сосуд в форме шестиугольной призмы наполнен жидкостью до отметки 24 см. Найдите, на какой высоте будет уровень этой же жидкости, если её перелить в другой сосуд такой же формы, но со стороной основания вдвое меньшей, чем сторона первого сосуда. Ответ дайте в сантиметрах.

657. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 48, проведена плоскость, параллельная боковому ребру (см. рис. 358). Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

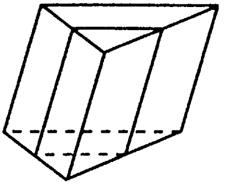


Рис. 358.

658. От треугольной призмы, объём которой равен 18, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объём оставшейся части.

659. Основанием прямой треугольной призмы (см. рис. 359) служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Площадь её поверхности равна 180. Найдите высоту призмы.

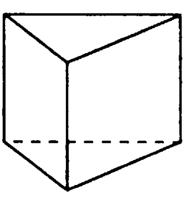


Рис. 359.

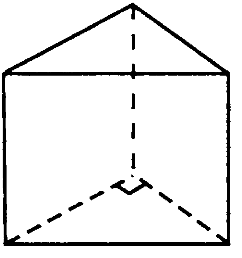


Рис. 360.

660. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Площадь её поверхности равна 960. Найдите высоту призмы (см. рис. 360).

661. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 96 и 28 (см. рис. 361). Площадь её боковой поверхности равна 600. Найдите боковое ребро этой призмы.

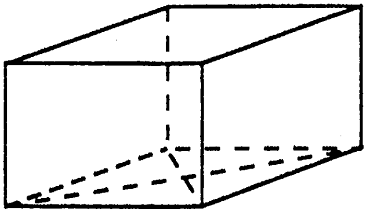


Рис. 361.

662. Найдите объём призмы, в основаниях которой лежит квадрат со стороной 2,5, а боковые рёбра равны $8\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 60°.

663. Объём куба равен 180. Найдите объём треугольной призмы, отсекаемой от него плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины (см. рис. 362).

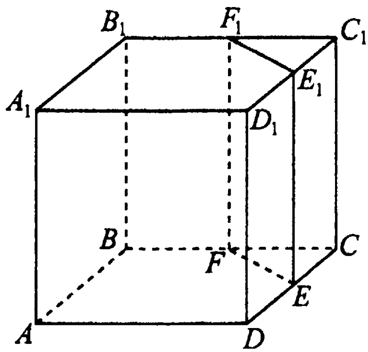


Рис. 362.

664. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны оснований равны 1, боковые рёбра равны 3. Найдите угол CE_1E. Ответ дайте в градусах.

665. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол EAE_1. Ответ дайте в градусах.

666. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

18.3. Тетраэдр и пирамида

Объём тетраэдра и пирамиды (см. рис. 363) можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h.$$

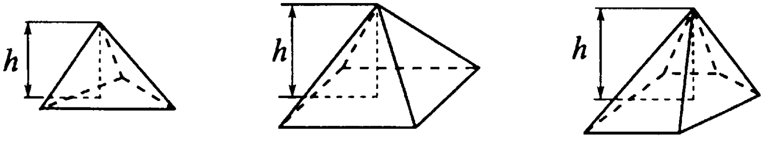


Рис. 363.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания и апофемы (высоты боковой грани, проведённой из вершины пирамиды, см. рис. 364):

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} l.$$

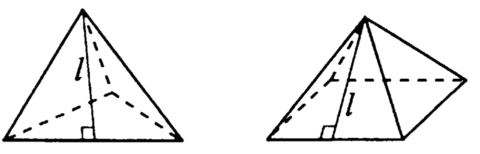


Рис. 364.

Высота правильной пирамиды падает в центр её основания. Углом между ребром и плоскостью основания называют угол между этим ребром и его проекцией на плоскость основания. На рисунке 365 $SABC$ — правильная пирамида, SO — высота. Тогда O — центр основания ABC. Угол между ребром AS и плоскостью основания $\alpha = \angle SAO$.

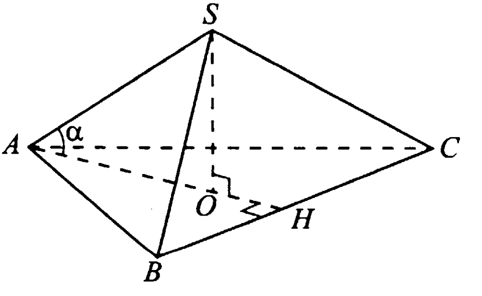


Рис. 365.

Углом между боковой гранью и плоскостью основания называют угол между апофемой боковой грани и проекцией этой апофемы на плоскость основания. На рисунке 366 $ABCS$ — правильная пирамида,

SH — апофема, $\beta = \angle AHS$ — угол между гранью BCS и плоскостью основания ABC.

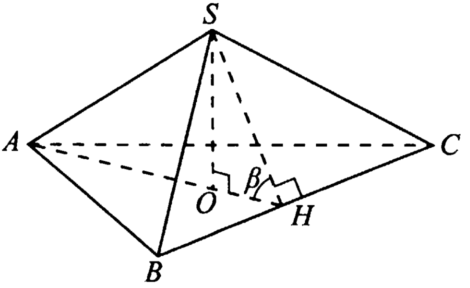


Рис. 366.

667. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды (см. рис. 367) равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

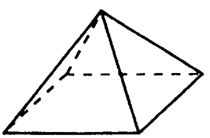


Рис. 367.

668. Сечение площадью 2,25 проходит через середины четырёх рёбер правильного тетраэдра (см. рис. 368). Найдите площадь S полной поверхности тетраэдра. В ответе укажите $2\sqrt{3}S$.

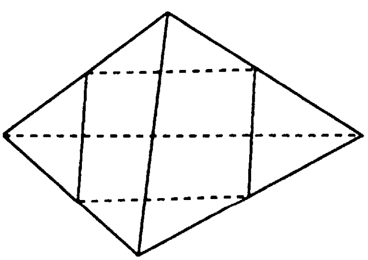


Рис. 368.

669. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° (см. рис. 369). Высота пирамиды равна 12. Найдите объём пирамиды.

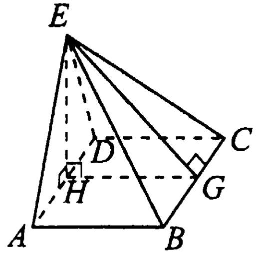


Рис. 369.

670. Три боковых ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, их длины равны 3, 7 и 5. Найдите объём пирамиды.

671. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие наклонены к плоскости основания под углом 30°. Высота пирамиды равна 5. Найдите объём пирамиды.

672. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 24, а угол между боковой гранью и основанием равен 45° (см. рис. 370). Найдите объём пирамиды.

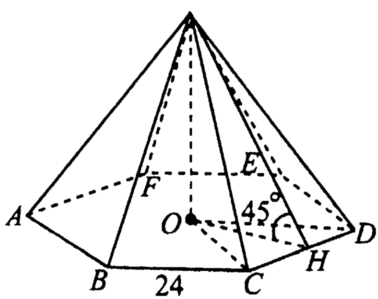


Рис. 370.

673. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды (см. рис. 371) равна 4, боковое ребро равно 8. Найдите объём пирамиды.

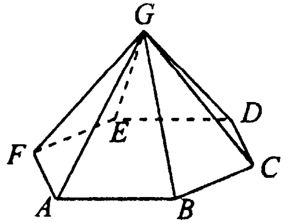


Рис. 371.

674. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (см. рис. 372), площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 3.

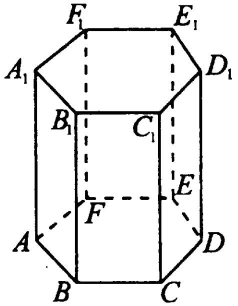


Рис. 372.

675. Найдите объём пирамиды, изображённой на рисунке 373. Её основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 4.

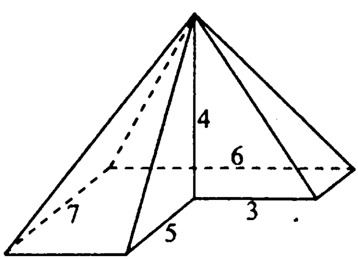


Рис. 373.

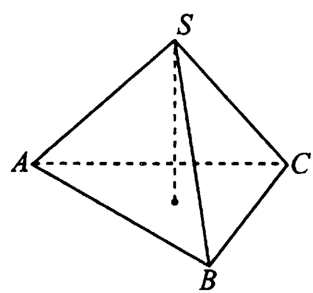


Рис. 374.

676. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и объём равен $12\sqrt{3}$ (см. рис. 374).

Задания для контроля

Вариант 1

1. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 10 и 24, а её боковое ребро равно 20 (см. рис. 375).

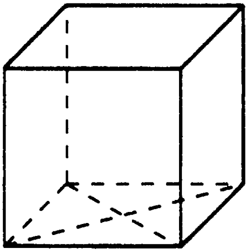


Рис. 375.

2. Найдите угол CAD_2 многогранника, изображённого на рисунке 376. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

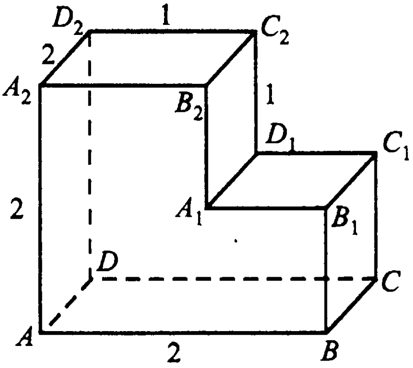


Рис. 376.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите тангенс угла CF_1F.

4. Объём куба равен $3\sqrt{3}$. Найдите его диагональ (см. рис. 377).

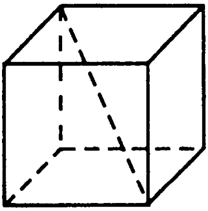


Рис. 377.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 7$, $AD = 24$, $AA_1 = 15$. Найдите синус угла между прямыми CA и D_1C_1.

Вариант 2

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 378). Объём треугольной пирамиды A_1BC_1D равен 3. Чему равен объём куба?

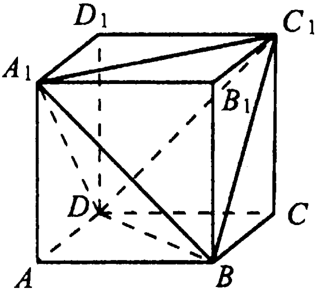


Рис. 378.

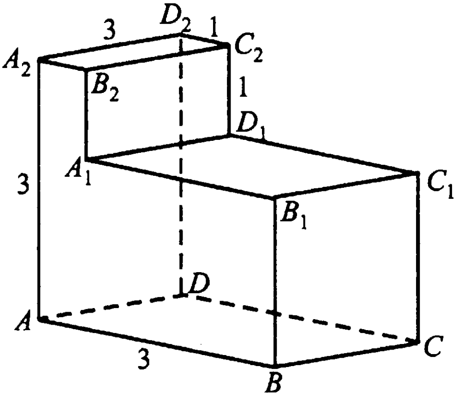


Рис. 379.

2. Найдите угол ADB многогранника, изображённого на рисунке 379. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол $C_1B_1F_1$. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите квадрат расстояния между вершинами D и B_3 многогранника, изображённого на рисунке 380. Все двугранные углы многогранника прямые.

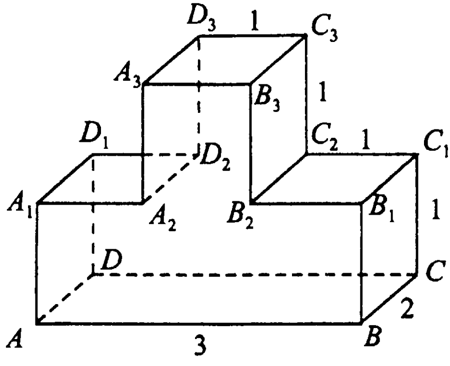


Рис. 380.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

Вариант 3

1. Диагональ грани куба равна $3\sqrt{2}$ (см. рис. 381). Найдите объём куба.

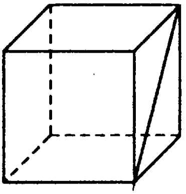


Рис. 381.

2. Найдите угол AA_2C многогранника, изображённого на рисунке 382. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

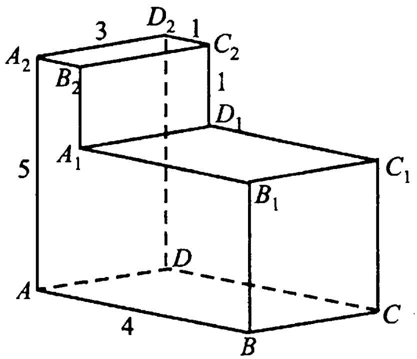


Рис. 382.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите угол BD_1D. Ответ дайте в градусах.

4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности параллелепипеда равна 192. Найдите его диагональ (см. рис. 383).

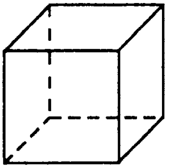


Рис. 383.

5. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 5 и 8. Её объём равен 120. Найдите высоту этой пирамиды.

Вариант 4

1. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны 5, сторона основания равна 6 (см. рис. 384). Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

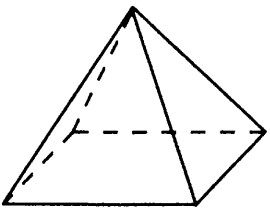


Рис. 384.

2. Найдите тангенс угла ABA_1 многогранника, изображённого на рисунке 385. Все двугранные углы многогранника прямые.

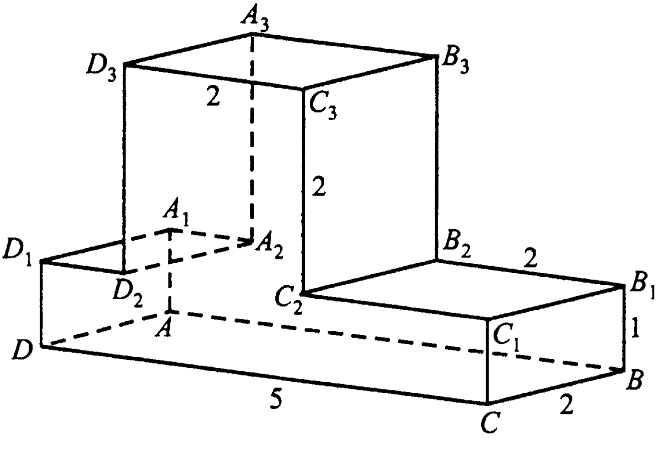


Рис. 385.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и B_1C_1. Ответ дайте в градусах.

4. Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника, изображённого на рисунке 386. Все двугранные углы многогранника прямые.

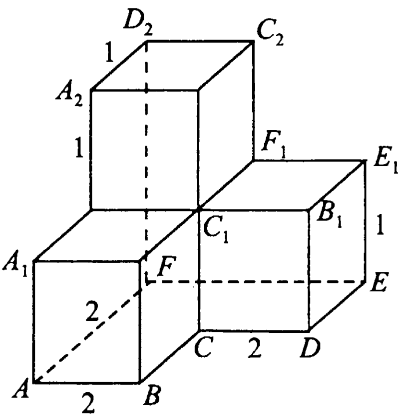


Рис. 386.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 5, объём равен 480. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

§ 19. Цилиндр, конус, шар, комбинации тел

19.1. Цилиндр

Для объёма и площади боковой поверхности цилиндра (см. рис. 387) справедливы те же формулы, что и для призмы:

$$V = S_{\text{осн.}}h, \quad S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}}h.$$

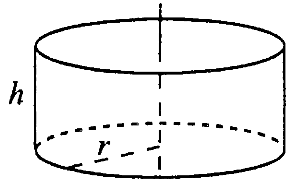


Рис. 387.

Если радиус основания равен r, то площадь основания цилиндра равна πr^2, а периметр — $2\pi r$. Тогда формулы объёма цилиндра, площадей боковой и полной поверхности цилиндра имеют вид

$$V = \pi r^2 h, \quad S_{\text{бок.}} = 2\pi r h, \quad S_{\text{полн.}} = 2\pi r(h + r).$$

677. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 45 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

678. В цилиндрический сосуд налили 3000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см (см. рис. 388). В воду полностью погрузили деталь, при этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 4 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

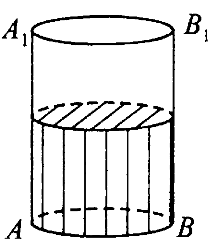


Рис. 388.

679. Сосуд в форме цилиндра заполнен водой до отметки 36 см. Найдите, на какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд в форме цилиндра, радиус основания которого в 3 раза меньше радиуса основания первого цилиндра. Ответ дайте в сантиметрах.

680. Площадь осевого сечения цилиндра равна 6 (см. рис. 389). Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, делённую на π.

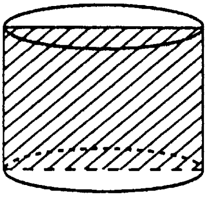


Рис. 389.

681. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π, высота равна 8 (см. рис. 390). Найдите диаметр основания цилиндра.

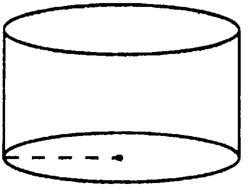


Рис. 390.

682. Объём первого цилиндра равен 24 м^3. У второго цилиндра высота в два раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

683. Длина окружности основания цилиндра равна 2. Площадь боковой поверхности равна 14. Найдите высоту цилиндра.

19.2. Конус

Объём конуса (см. рис. 391) может быть вычислен по той же формуле, что и объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h.$$

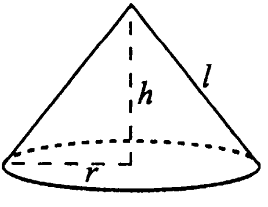


Рис. 391.

Если известен радиус основания r, то объём можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Площади боковой и полной поверхности конуса вычисляются следующим образом (l — образующая):

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l, \quad S_{\text{полн.}} = \pi r(r + l).$$

684. Найдите объём V конуса, образующая которого равна 10 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

685. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса равен 15. Определите объём исходного конуса.

686. Диаметр основания конуса равен 12, а угол при вершине осевого сечения 90° (см. рис. 392). Вычислите объём конуса, делённый на π.

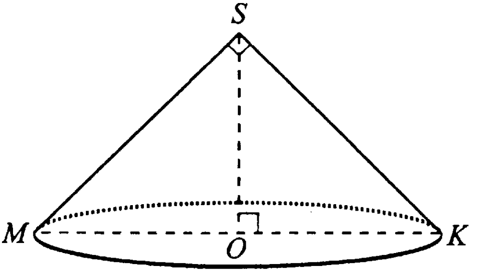


Рис. 392.

687. Найдите объём V конуса, образующая которого равна 10 и наклонена к плоскости основания под углом 30° (см. рис. 393). В ответе укажите значение $\frac{V}{\pi}$.

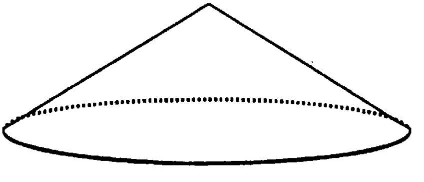


Рис. 393.

688. Во сколько раз уменьшится объём конуса (см. рис. 394), если диаметр его основания уменьшить в 2,5 раза?

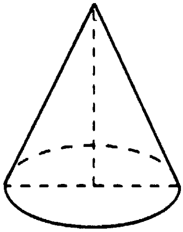


Рис. 394.

689. Длина окружности основания конуса равна 4, образующая равна 5. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

690. Высота конуса равна 15, а диаметр основания — 16. Найдите образующую конуса.

691. Площадь полной поверхности конуса равна 90π, а радиус основания равен 5. Найдите высоту конуса.

692. Найдите объём V части конуса, изображённой на рисунке 395. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

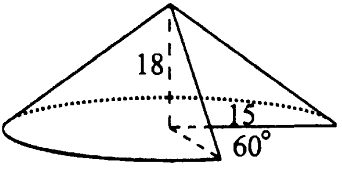


Рис. 395.

693. Радиус основания конуса равен 4, высота — 93. Найдите объём V части этого конуса, изображённой на рисунке 396. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

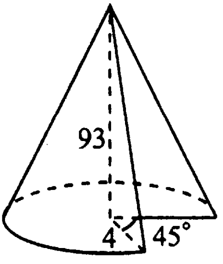


Рис. 396.

19.3. Шар

Объём шара и площадь его поверхности вычисляются по формулам

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2.$$

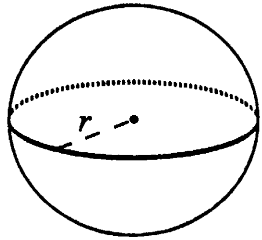


Рис. 397.

694. Объём шара равен $36\,000\pi$. Найдите площадь его поверхности, делённую на π.

695. Радиусы двух шаров равны 9 и 40. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей обоих шаров (см. рис. 398).

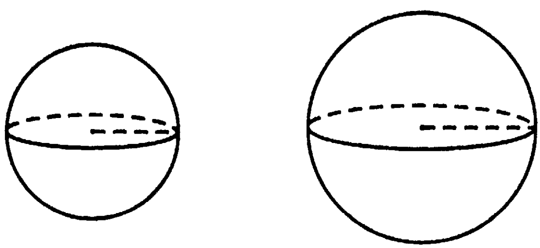


Рис. 398.

696. Объём одного шара в 64 раза больше объёма второго (см. рис. 399). Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

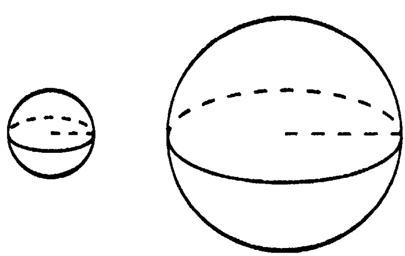


Рис. 399.

697. Площадь большого круга шара равна 10 (см. рис. 400). Найдите площадь поверхности шара.

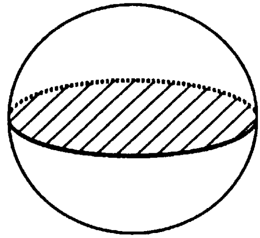


Рис. 400.

698. Площадь большого круга шара равна 7,5 (см. рис. 401). Найдите площадь поверхности шара.

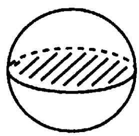


Рис. 401.

19.4. Увеличение и уменьшение геометрических тел

При увеличении всех линейных измерений тела в k раз площадь поверхности этого тела увеличивается в k^2 раз, а объём этого тела — в k^3 раз. Например, при увеличении радиуса шара в 5 раз площадь его поверхности увеличится в 25 раз, а объём — в 125 раз.

Объём параллелепипеда, призмы, цилиндра и конуса прямо пропорционален высоте и площади основания.

699. Во сколько раз увеличится объём куба, если его рёбра увеличить в 4 раза?

700. Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличить в 2,5 раза?

701. Объём первого конуса равен 30 м^3. У второго конуса радиус основания в 2 раза больше радиуса первого конуса, а высота второго в 3 раза меньше высоты первого. Найдите объём второго конуса. Ответ укажите в м^3.

702. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его рёбра увеличить в три раза?

703. Во сколько раз увеличится объём шара (см. рис. 402), если его площадь поверхности увеличилась в 9 раз?

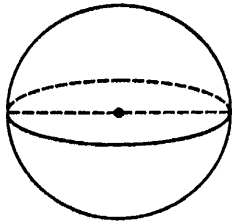


Рис. 402.

704. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности шара, если радиус шара уменьшится в 3 раза?

705. Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра (см. рис. 403), если каждое ребро увеличить в 7,1 раз?

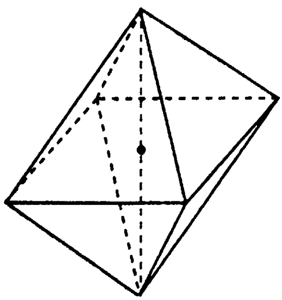


Рис. 403.

19.5. Комбинации тел

$\boxed{\textbf{706.}}$ Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту (см. рис. 404). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 16.

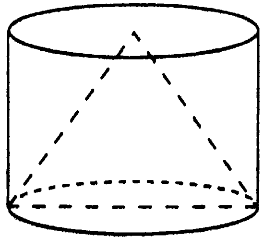


Рис. 404.

707. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 5,5.

708. Конус описан около правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 6 и высотой $\frac{9}{\pi}$. Найдите его объём.

709. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. 405), радиус основания которого равен 5. Объём параллелепипеда равен 600. Найдите высоту цилиндра.

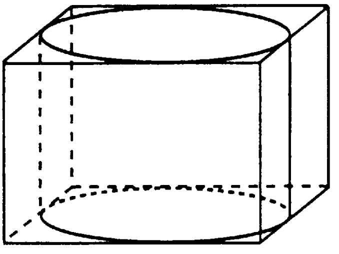


Рис. 405.

710. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 20. Найдите его объём.

711. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и $4\sqrt{2}$. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

712. Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 18. Найдите объём цилиндра.

713. Объём куба равен 30 (см. рис. 406). Найдите объём четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

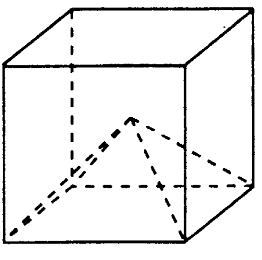


Рис. 406.

714. Конус вписан в шар (см. рис. 407). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 15. Найдите объём шара.

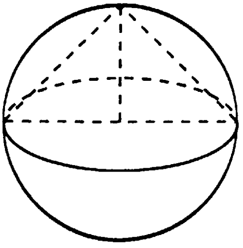


Рис. 407.

715. Конус объёмом 5,3 вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Найдите объём шара.

$\boxed{\textbf{716.}}$ Объём правильной шестиугольной пирамиды $GABCDEF$ равен 60 (см. рис. 408). Найдите объём треугольной пирамиды $GABC$.

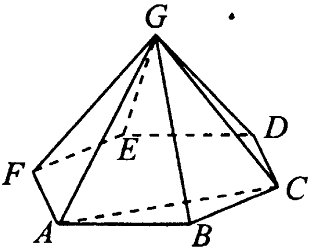


Рис. 408.

717. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C_1, D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 15$, $AD = 5$, $AA_1 = 1$.

Задания для контроля

Вариант 1

1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 8π, высота равна 2 (см. рис. 409). Найдите диаметр основания цилиндра.

2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, высота которого равна 16 (см. рис. 410). Объём параллелепипеда равен 64. Найдите радиус цилиндра.

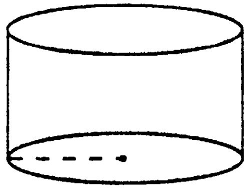


Рис. 409.

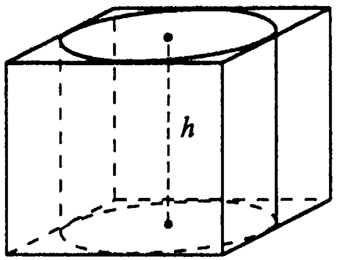


Рис. 410.

3. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объём конуса, если объём шара равен 8.

4. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности шара, если радиус шара уменьшится в 3 раза?

5. Сосуд в виде правильной треугольной пирамиды высотой $25\sqrt{3}$ см доверху заполнен водой. Найдите, на какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд, имеющий форму куба со стороной, равной стороне основания данной треугольной пирамиды. Ответ выразите в сантиметрах.

Вариант 2

1. Найдите площадь поверхности сферы, если площадь боковой поверхности вписанного в сферу конуса с основанием, совпадающим с сечением сферы, проходящим через её центр (см. рис. 411), равна $6\sqrt{2}$.

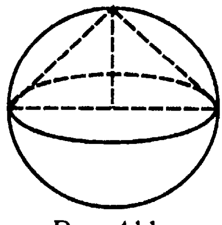


Рис. 411.

2. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра (см. рис. 412), радиус основания которого равен 5, а высота равна $2\sqrt{3}$.

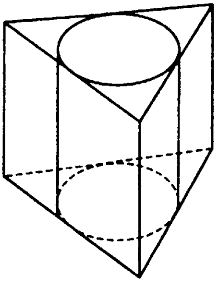


Рис. 412.

3. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара (см. рис. 413), если его объём увеличился в 27 раз?

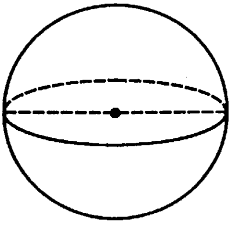


Рис. 413.

4. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны $\sqrt[3]{2}$. Найдите объём параллелепипеда.

5. В основании пирамиды лежит правильный треугольник (см. рис. 414). В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра, той же высоты, что и пирамида. Найдите объём пирамиды, если объём цилиндра равен $\pi\sqrt{3}$.

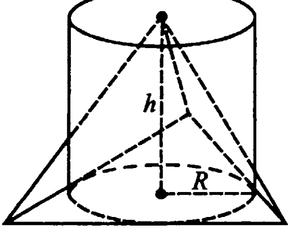


Рис. 414.

Вариант 3

1. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом при основании $60°$ и боковой стороной 6, при этом одно из оснований проходит через центр окружности. Найдите объём конуса, описанного около пирамиды (см. рис. 415), если высота пирамиды равна 10. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

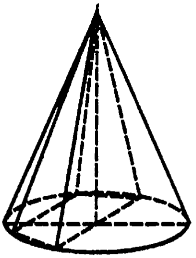


Рис. 415.

2. Объём первой пирамиды равен 24 м^3. У второй пирамиды площадь основания в 6 раз больше, чем площадь основания первой пирамиды, а высота второй пирамиды в три раза меньше, чем первой. Найдите объём второй пирамиды. Ответ дайте в кубических метрах.

3. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной $\sqrt{6}$. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

4. В конус вписан цилиндр (см. рис. 416), высота которого в три раза меньше высоты конуса. Во сколько раз объём конуса больше объёма цилиндра?

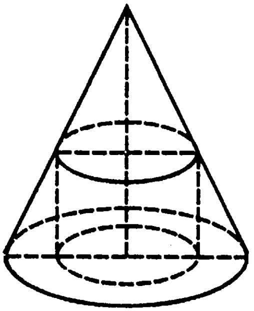


Рис. 416.

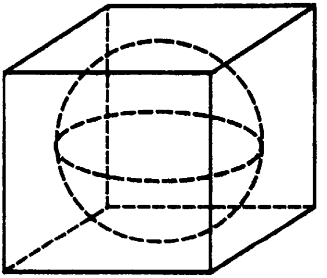


Рис. 417.

5. Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в куб (см. рис. 417), если ребро куба равно $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

Вариант 4

1. Если каждое ребро куба увеличить на 2 (см. рис. 418), то его площадь поверхности увеличится на 192. Найдите ребро куба.

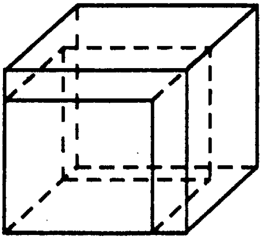


Рис. 418.

2. Диаметр основания конуса равен 18, а длина образующей — 15. Найдите высоту конуса.
3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 35π, а высота — 7. Найдите диаметр основания.
4. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $5\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.
5. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 8 и 5 (см. рис. 419). Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

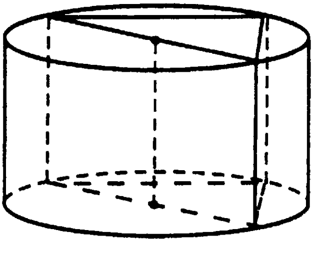


Рис. 419.

Глава II. Задания повышенного и высокого уровня сложности

§ 20. Тригонометрические уравнения и отбор корней

718. а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right]$.

719. а) Решите уравнение $27^{\operatorname{tg}^2 x} + 81 \cdot 27^{-\operatorname{tg}^2 x} = 30$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

720. а) Решите уравнение $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

721. а) Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = 1$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

722. Решите уравнение:
а) $4\sin^3 x + 7\sin 2x - 4\sin x = 0$.
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

723. а) Решите уравнение $4\cos^3 x + 5\sin 2x + 2\cos x = 0$.
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(0; \frac{7\pi}{6}\right]$.

724. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin^2 2x - 2\sin 4x + \sqrt{3}\cos^2 2x = 0$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1; 1]$.

725. а) Решите уравнение $\sin^2 3x - 2\sin 6x + 3\cos^2 3x = 0$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1; 1]$.

726. а) Решите уравнение $\sin(3\pi - 2x) + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

727. а) Решите уравнение $2\cos^2 x + \sin 2x = \sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0)$.

728. а) Решите уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x} + \left(\frac{7}{3}\right)^{\sin 2x} = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right)$.

729. а) Решите уравнение $\left(\frac{6}{5}\right)^{\cos 3x} + \left(\frac{5}{6}\right)^{\cos 3x} = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[4\pi; \frac{9\pi}{2}\right)$.

730. а) Решите уравнение $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

731. а) Решите уравнение $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

§ 21. Стереометрия

732. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через центр основания треугольника ABC и центры симметрий боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C проведена плоскость, которая составляет с плоскостью основания $30°$.

а) Постройте сечение, образованное этой плоскостью.

б) Найдите площадь этого сечения, если сторона основания равна 6.

733. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка O — центр основания треугольника ABC, точки O_1 и O_2 — центры симметрий боковых граней AA_1B_1B и AA_1C_1C соответственно.

а) Постройте сечение призмы плоскостью OO_1O_2.

б) Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью OO_1O_2, если сторона основания призмы равна 9, а площадь сечения призмы плоскостью OO_1O_2 равна $13{,}5\sqrt{3}$.

734. В основание цилиндра высотой 24 и радиусом основания 8 вписан тупоугольный треугольник ABC, в котором $BC = 12$, $AB = AC$.

а) Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, перпендикулярной плоскостям BB_1C_1C и A_1BC и проходящей через точку A, если AA_1, BB_1 и CC_1 — образующие цилиндра.

б) Найдите величину угла между плоскостью B_1BC и A_1BC.

735. В основание цилиндра высотой 60 и радиусом основания 15 вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $BC = 10$, $AB = AC$.

а) Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярную плоскостям CBB_1 и BA_1C, если AA_1, BB_1 и CC_1 — образующие цилиндра.

б) Найдите величину угла между плоскостями CBB_1 и BA_1C.

736. На ребре A_1D_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K, $A_1K : KD_1 = 1 : 2$.

а) Постройте сечение куба, проходящее через точку K и параллельное прямым C_1D и B_1D_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

737. На ребре AD единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K, $AK : AD = 1 : 2$.

а) Постройте сечение этого куба плоскостью, проходящей через точку K параллельно прямым C_1D и B_1D_1.

б) Найдите площадь этого сечения.

738. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $\sqrt{6}$, сторона основания 4.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую C_1K и перпендикулярную плоскости BCC_1, где K — середина стороны AC.

б) Найдите косинус угла между прямой C_1K и плоскостью боковой грани BB_1C_1C.

739. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ в основании лежит треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 16$, $BC = 10$. Боковое ребро равно $\sqrt{33}$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую A_1B и перпендикулярную плоскости CC_1B_1.

б) Найдите косинус угла между A_1B и плоскостью боковой грани CC_1B_1B.

740. Дана правильная четырёхугольная пирамида, сторона основания которой равна 18, а высота равна 24.

а) Постройте сечение, проходящее через две противоположные вершины основания и перпендикулярное одному из боковых рёбер.

б) Найдите косинус угла между смежными боковыми гранями.

741. Косинус угла между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равен $-\frac{1}{8}$, сторона основания равна 12.

а) Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и перпендикулярную скрещивающемуся с ней ребру.

б) Найдите объём этой пирамиды.

742. Около шара описан усечённый конус, у которого площадь одного основания в 4 раза больше другого.

а) Докажите, что длина образующей усечённого конуса равна сумме радиусов его оснований.

б) Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

743. Около шара описана правильная усечённая четырёхугольная пирамида, у которой площадь одного основания в 9 раз больше площади другого.

а) Докажите, что боковыми гранями усечённой пирамиды являются трапеции, высоты которых равны среднему арифметическому сторон оснований.

б) Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

§ 22. Неравенства и системы неравенств

744. Решите неравенство $\dfrac{\log_{4^x+2} 16}{\log_{4^x+2}(-16x)} \leqslant \dfrac{1}{\log_4 \log_{\frac{1}{4}} 4^x}$.

745. Решите неравенство $\dfrac{\log_{3^x+4} 9}{\log_{3^x+4}(-27x)} \geqslant \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^x}$.

746. Решите неравенство $(x-1)(2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 2) < 0$.

747. Решите неравенство $(4-x)(2\log_{11}^2 x - 3\log_{11} x + 1) > 0$.

748. Решите неравенство $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$.

749. Решите неравенство $\log_{0,5}(x-3) - \log_{0,5}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0$.

750. Решите неравенство $\left||3^x + 4x - 9| - 8\right| \leqslant 3^x - 4x - 1$.

751. Решите неравенство $\left||2^x + 4x - 9| - 8\right| \leqslant 2^x - 4x - 1$.

752. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{4-x} \dfrac{x+5}{(x-4)^2} \geqslant -2, \\ x^3 + 7x^2 + \dfrac{27x^2 + 5x - 25}{x-5} \leqslant 5. \end{cases}$

753. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{5-x} \dfrac{x+6}{(x-5)^2} \geqslant -2, \\ x^3 + 2x^2 - \dfrac{7x^2 - 6x + 24}{x-4} \leqslant 6. \end{cases}$

754. Решите систему неравенств
$\begin{cases} 25^{x-1} - 27 \cdot 5^{x-2} + 2 \geqslant 0, \\ \log_x(x^2 - 12x + 36) \leqslant 0. \end{cases}$

755. Решите систему неравенств
$\begin{cases} 9^{x-2} - 83 \cdot 3^{x-4} + 2 \geqslant 0, \\ \log_x(x^2 - 14x + 49) \leqslant 0. \end{cases}$

756. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} \geqslant 27^x, \\ \log_{x+2}(2x^2 + x) > 2. \end{cases}$

757. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{10-x^2}{2}} \geqslant 8^x, \\ \log_{2x+5}(x^2 - 28x - 7) > 0. \end{cases}$

758. Решите систему неравенств $\begin{cases} 25^{\frac{x}{2}} + \dfrac{20}{5^x} \geqslant 9, \\ \log_{x+5}\left(\dfrac{x+2}{5}\right) \leqslant 0. \end{cases}$

759. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x + \dfrac{22}{2^x} \geqslant 13, \\ x\log_{x+2}(5-2x) \leqslant 0. \end{cases}$

§ 23. Планиметрия

760. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H.

а) Докажите, $\angle BHA_1 = \angle ACB$.

б) Известно, что $BH = 17$, $\angle ABC = 45°$. Найдите AC.

761. В остроугольном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle BHC_1 = \angle BAC$.

б) Известно, что $BC = 25$, $\angle BAC = 60°$. Найдите AH.

762. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке P, на первой окружности взята точка Q_1, на второй — Q_2, при этом точки Q_1 и Q_2 лежат по разные стороны от прямой O_1O_2, $O_1Q_1 \parallel O_2Q_2$.
а) Докажите, что отрезок Q_1Q_2 проходит через точку P.
б) Найдите радиус второй окружности, если радиус первой равен 4, $Q_1O_2 = 4\sqrt{7}$ и $\angle PO_2Q_2 = 60°$.

763. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке Q, прямая M_1M_2 проходит через точку Q, при этом M_1 лежит на первой окружности, M_2 — на второй, а точка O_1 не лежит на этой прямой.
а) Докажите, что O_1M_1 параллельна O_2M_2.
б) Найдите периметр четырёхугольника $O_1M_1O_2M_2$, если радиус первой окружности — 4, радиус второй — 6, а расстояние между прямыми O_1M_1 и O_2M_2 равно 8.

764. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Известно, что $AC = 6KB_1$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите длину отрезка EF, где E — точка касания стороны AC и вписанной в треугольник окружности, F — точка касания стороны AC и окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC, если известно, что $AB = 6$, $AC = 10$.

765. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Известно, что $AB = 3KC$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите длину отрезка EF, где E — точка касания стороны AC и вписанной в треугольник ABC окружности, F — точка касания стороны AC и окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC, если известно, что $AC = 3$, $BC = 4$.

$\boxed{766.}$ На окружности радиуса $4\sqrt{3}$ с центром O взяты точки A, B, C, N, D в указанном порядке, при этом N — середина дуги CD, M — точка пересечения хорд NA и DC, L — точка пересечения хорд NB и DC.
а) Докажите, что четырёхугольник $AMLB$ можно вписать в окружность.
б) Найдите радиус окружности, описанной около $AMLB$, если

$\smile DA = \smile CB$, $\smile AB = 120°$, $\cos\angle NOC = \frac{1}{4}$ и точка O лежит внутри $AMLB$.

767. На окружности радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O взяты точки M, N, P, K в указанном порядке, S — середина дуги NP. SM и NP пересекаются в точке A, SK и NP в точке B, $\smile MN = \smile KP$.
а) Докажите, что $MABK$ — равнобедренная трапеция.
б) Найдите площадь трапеции, если точка O лежит внутри $MABK$, $\smile MK = 120°$, $\angle SOP = 60°$.

$\boxed{768.}$ Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, BC и AD — основания трапеции.

а) Докажите, что $\frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{BC}{AD}$.

б) Найдите площадь трапеции, если $AD = 4BC$, $S_{AOB} = 2$.

769. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, BC и AD — основания трапеции.

а) Докажите, что $\frac{S_{ABO}}{S_{BOC}} = \frac{AD}{BC}$.

б) Найдите площадь трапеции, если $AD = 5$, $BC = 1$, $S_{ABO} = 5$.

$\boxed{770.}$ Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O, причём $AO \cdot CO = BO \cdot DO$.
а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
б) Найдите радиус описанной вокруг трапеции окружности, если основания трапеции равны 6 и 8.

771. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O, причём $AO \cdot CO = BO \cdot DO$.
а) Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.
б) Найдите боковую сторону трапеции, если радиус описанной вокруг трапеции окружности равен $3\sqrt{2}$.

§ 24. Экономическая задача

772. Акционерное общество израсходовало 20% своей годовой прибыли на реконструкцию производственной базы, 25% оставшихся денег потратило на строительство спортивного комплекса, выплатило 4 200 000 рублей дивидендов по акциям. После всех этих расходов осталась нераспределённой 0,1 прибыли. Сколько рублей составляла прибыль акционерного общества?

773. Прибыль предприятия к концу года составила 9 408 000 рублей. Совет акционеров постановил распределить эту прибыль следующим образом: A рублей направить в фонд развития предприятия, 30% от A использовать для выплаты дивидендов акционерам, а 10% от A использовать на приобретение основных фондов. При этом было решено выплачивать дивидендов в полтора раза больше по каждой из 200 имеющихся привилегированных акций, чем по каждой из 300 имеющихся обыкновенных акций. Сколько рублей будет выплачиваться по одной привилегированной акции?

774. Предприниматель взял в аренду на 3 года помещения на условиях ежегодной платы (в конце года) C рублей. Имея некоторый первоначальный капитал, он удвоил его в течение года и оплатил аренду. Такая схема деятельности осуществлялась все три года. В результате в конце третьего года деятельности после оплаты аренды предприниматель имел капитал, в три раза превышающий первоначальный. Определите величину первоначального капитала, если аренда C составляла 12 000 рублей.

775. Клиент взял в банке 12 000 000 рублей в кредит под 20% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами? (Ответ округлите до целого числа).

776. Мария Петровна положила в банк 1 500 000 рублей под 7% годовых. Схема начисления процентов следующая: каждый год банк начисляет проценты на имеющуюся сумму вклада (то есть увеличивает сумму на 7%). По истечении двух лет банк повысил процент с 7% до 10%. Сколько лет должен пролежать вклад, чтобы он увеличился по сравнению с первоначальным на 577 993,5 рублей (при условии, что процент изменяться больше не будет)?

777. В банк помещён вклад 64 000 рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трёх лет (после начисления процентов) вкладчик дополнительно положил на счёт одну и ту же фиксированную сумму. К концу четвёртого года после начисления процентов оказалось, что он составляет 385 000 рублей. Какую сумму (в рублях) ежегодно добавлял вкладчик?

778. Гражданин Плюшкин выиграл по лотерейному билету в Британской национальной лотерее, в которой выигрыш не облагается налогом. На 800 тысяч долларов он купил предприятие, а остальные деньги положил в банк под 6% годовых от вложенной суммы.

В конце года выяснилось, что за год было реализовано продукции на 550 тысяч долларов, из них 350 тысяч долларов составили затраты производства (стоимость сырья, ремонт оборудования и т.п.) и 100 тысяч долларов выплачено персоналу. Остальные деньги составила прибыль гражданина Плюшкина. Через сколько лет общая сумма прибыли Плюшкина в первый раз превысит или будет равна начальному капиталу, вложенному в производство, если каждый год масштаб реализации продукции повышается на 10% от начального, затраты производства повышаются на 6% от первоначальных, а зарплата персонала увеличивается на 4% от первоначальной?

779. Билл несколько лет назад вложил деньги в акции некоторого предприятия. Ежегодно он получал прибыль по акциям сначала $9\frac{1}{11}\%$ в год, потом 37,5% в год и наконец $6\frac{2}{3}\%$ в год и сразу же вкладывал деньги в те же акции. Известно, что одинаковые процентные ставки были равное число лет, а в конце первоначальная сумма его вклада увеличилась на 156%. Определите срок хранения вклада.

§ 25. Уравнения и неравенства с параметром

780. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ y = |x-a| + 3a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

781. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (x+5)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ y = 5a - |x-a|, \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

782. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство $x^2 + 3x - 3 + |x-a| > 1$ выполняется при всех x.

783. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство $x^2 + 5x - 4 + |x-a| > 2$ выполняется при всех x.

784. Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения $6\sqrt{x-1} + 5\log_3(2x-1) + 11a = 0$ принадлежит отрезку $[2;\ 5]$.

785. Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения

$2\sqrt{9-4x} - 7\log_{\frac{1}{2}}(2 - \frac{1}{2}x) - 4a = 0$ принадлежит отрезку $[-4;\ 0]$.

786. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{a}{9^x} + a = -1 - \frac{9^{-2x}}{3}$ имеет ровно два корня, больший из которых не меньше 0,5.

787. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{a}{25^x} - a = 2 - \frac{25^{-2x}}{5}$ имеет ровно два корня, хотя бы один из которых не менее $\frac{1}{2}$.

§ 26. Исследовательские задачи

788. Девять членов жюри оценивают выступление танцевальной пары. Каждый из них выставляет оценки — целое число от 0 до 15 включительно. Известно, что все члены жюри поставили различные оценки. По старой системе оценивания оценка пары определяется как среднее арифметическое всех оценок членов жюри. По новой системе оценивания оценка пары определяется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и считается среднее арифметическое семи оставшихся оценок.

а) Может ли разность оценок, полученных парой по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{2}{49}$?

б) Может ли разность оценок, полученных парой по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{1}{63}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности оценок, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

789. Восемь членов жюри оценивают выступление вокального коллектива. Каждый из них выставляет оценки — целое число от 0 до 13 включительно. Известно, что все члены жюри поставили различные оценки. По старой системе оценивания оценка коллектива определяется как среднее арифметическое всех оценок членов жюри. По новой системе оценивания оценка коллектива определяется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и считается среднее арифметическое шести оставшихся оценок.

а) Может ли разность оценок, полученных коллективом по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{1}{9}$?

б) Может ли разность оценок, полученных коллективом по старой и по новой системам оценивания, быть равна $\frac{1}{24}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности оценок, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

790. На психологический тренинг пришли m человек. В начале работы психолог попросил каждого пришедшего написать записку с вопросом к любому другому из участников (ровно одному). После этого в группу A были отобраны те, кто получил не более 1 вопроса.

а) Какое наибольшее число участников могло оказаться в группе A, если $m = 100$?

б) Какое наименьшее число участников могло оказаться в группе A, если $m = 144$?

в) Какое наименьшее число участников могло оказаться в группе A, если $m = 97$, а в группу A вошли те, кто не получил ни одного вопроса и половина тех, кто получил ровно один вопрос (если ровно один вопрос получило нечётное число человек, то берётся наибольшее число, не превосходящее половину)?

791. На психологический тренинг пришли n человек. В начале работы психолог попросил каждого пришедшего написать записку с вопросом к любому другому из участников (ровно одному). После обработки вопросов всех участников разделили на группы, в каждой из которых никто никому не задавал до этого вопросов, по следующему правилу. Первой стала наибольшая из всех таких возможных групп, второй — наибольшая среди участников, не вошедших в первую группу, третьей — наибольшая среди участников, не вошедших в первые 2 группы, и т.д. Если на каком-то шаге было несколько наибольших групп, психолог определял очередную жребием.

а) Какое наименьшее число групп могло получиться при $n = 20$?

б) Могло ли число групп равняться 6 при $n = 7$?

в) Какое наименьшее число участников может быть в первой группе при $n = 120$?

792. Среди четырёхзначных чисел найдите количество чисел, содержащих в своей десятичной записи а) ровно одну цифру 1; б) ровно две цифры 1; в) хотя бы одну цифру 1.

793. Среди четырёхзначных чисел найдите количество чисел, содержащих в своей десятичной записи а) ровно одну цифру 0; б) ровно две цифры 0; в) хотя бы одну цифру 0.

794. Натуральные числа от 1 до n в порядке возрастания записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Можно ли добиться того, чтобы сумма каждого числа и записанного под ним была бы точным квадратом:

а) при $n = 7$;

б) при $n = 12$;

в) при $n = 2015$?

795. Натуральные числа от 1 до n в порядке возрастания записаны в строчку. Под ними записаны те же числа в другом порядке. Можно ли добиться того, чтобы сумма каждого числа и записанного под ним была бы точным квадратом:

а) при $n = 6$;

б) при $n = 13$;

в) при $n = 2014$?

Решения избранных заданий

1. Всего на складе $217 + 315 = 532$ бочки. Чтобы получить число машин, делим с остатком общее число бочек (532) на число бочек в одной машине (85). Получаем $532 : 85 = 6$ (остаток 22). Итак, 6 машин не хватит, значит, нужно 7 машин.

5. 10 блокнотов стоят 64 рубля. У нас ещё останется $80 - 64 = 16$ рублей. На них можно купить 2 блокнота, а 3 уже не купишь. Значит, всего можно купить не более 12 блокнотов.

8. За месяц в школе используется 1200 листов бумаги, поэтому за 3 месяца израсходуют $1200 \cdot 3 = 3600$ листов. В каждой пачке 250 листов, поэтому необходимо $3600 : 250 = 14{,}4$ пачек. Ясно, что дробное число пачек никто продавать не станет, поэтому придётся купить 15 пачек бумаги.

11. Посчитаем, сколько пакетов яблочного сока (по 34 рубля за пакет) можно купить на 200 рублей. Для этого делим с остатком наши деньги (200 рублей) на цену пакета (34 рубля). $200 : 34 = 5$ (ост. 30). Получилось 5 пакетов сока. В рамках рекламной акции покупатель получит за 4 пакета ещё 2 пакета бесплатно. Всего он сможет получить $5 + 2 = 7$ пакетов сока.

13. Определим, сколько роз можно купить на 550 рублей. Для этого разделим с остатком 550 (деньги Сергея) на 45 (цена розы).
$550 : 45 = 12$ (ост. 10). Денег у Сергея хватит на 12 роз и 10 рублей останется. Но букет из 12 роз нам не подходит! Нужно нечётное число роз. Наибольшее подходящее число — это 11.

15. На 1 кг слив необходимо 1,4 кг сахара, поэтому на 23 кг слив нужно $23 \cdot 1{,}4 = 32{,}2$ кг сахара. В одной упаковке один килограмм, поэтому 32 упаковок не хватит. А 33 будет в самый раз.

20. Посчитаем, сколько ампул понадобится 25 больным в день: $25 \cdot 3 = 75$ ампул. В каждой упаковке 16 ампул. Чтобы узнать требуемое число упаковок, делим с остатком необходимое количество ампул (75) на число ампул в упаковке (16). Получаем $75 : 16 = 4$ (ост. 11). Итак, нужно 4 упаковки и ещё 11 ампул. Поэтому придётся заказать 5 упаковок.

23. Разделим 44 на 5. Получится 8 и 4 в остатке. Восемь этажей заполнится полностью и ещё 4 квартиры из этих 44 останутся на 9-й этаж. Значит, Пётр Иванович живёт на 9-м этаже.

27. Одна американская миля равна 1609 м $= 1{,}609$ км. Скорость автомобиля 47 миль в час соответствует скорости $1{,}609 \cdot 47 = 75{,}623$ км в час. Округляем ответ до целого числа по математическим правилам. Цифра в разряде десятых равна 6, поэтому округляем в большую сторону, с избытком: $75{,}623 \approx 76$.

30. Так как минуты времени отправления и прибытия одинаковые, можно их уменьшить и заменить на 00. Нужно посчитать, сколько часов пройдёт от 10:00 до 6:00 следующего дня. В первый день пройдёт $24 - 10 = 14$ часов, во второй — ещё 6 часов, всего $14 + 6 = 20$ часов.

33. Купленные 3,3 кг помидоров стоят $40 \cdot 3{,}3 = 132$ рубля. Сдача составляет $1000 - 132 = 868$ рублей.

37. Одна разовая поездка стоит 7 рублей, поэтому 48 разовых поездок стоят $48 \cdot 7 = 336$ рублей. Купив проездной за 280 рублей, Маша сэкономила $336 - 280 = 56$ рублей.

40. Найдём разницу показаний счётчика. Первые три цифры одинаковы, их можно не учитывать. Разница равна $308 - 25 = 283$. Найдём, сколько рублей нужно заплатить за 283 киловатт-часа. $283 \cdot 2{,}1 = 594{,}3$ рубля.

43. Стоимость платья без скидки составляет 100%, скидка равна 35%. Стоимость платья со скидкой составляет $100\% - 35\% = 65\%$ от цены без скидки. Найдём 65% от 2120 рублей. Чтобы найти проценты от числа, нужно это число разделить на 100 и умножить на число процентов. $2120 : 100 \cdot 65 = 1378$ рублей.

48. Не прошли ОТК 8% станков, поэтому прошли ОТК $100\% - 8\% = 92\%$ станков. Для того чтобы найти проценты от числа, нужно разделить это число на 100 и умножить на число процентов. 92% от 180 000 составляет $180\,000 : 100 \cdot 92 = 165\,600$ станков. Продали 45% от этого количества, то есть $165\,600 : 100 \cdot 45 = 74\,520$ станков.

51. Стоимость билета для ребёнка составляет 50% от 260 рублей, то есть $260 : 100 \cdot 50 = 130$ рублей. 17 детских билетов по 130 рублей стоят $130 \cdot 17 = 2210$ рублей. 2 взрослых билета по 260 рублей стоят $260 \cdot 2 = 520$ рублей. Билеты на всю группу сто́ят $2210 + 520 = 2730$ рублей.

53. После переоценки блокнот стоит $100\% + 10\% = 110\%$ от начальной цены, что составляет $6 : 100 \cdot 110 = 6{,}6$ рублей. Посчитаем, сколько блокнотов по цене 6,6 рублей можно купить на 80 рублей. $80 : 6{,}6 = 800 : 66 = 12$ (остаток 8). На 80 рублей можно купить 12 блокнотов.

54. $20 \cdot 1{,}25 = 25$ (рублей) — новая цена открытки. $200 : 25 = 8$, значит, можно будет купить 8 открыток.

62. Найдём, сколько рублей будут составлять проценты по кредиту. 12% от 24 000 составляют $24\,000 : 100 \cdot 12 = 2\,880$ рублей. Значит, всего Анна Владимировна должна заплатить за год $24\,000 + 2880 = 26\,880$ рублей. Месяцев в году 12. Каждый месяц она должна вносить
$26\,880 : 12 = 2240$ рублей.

64. Ясно, что толщина учебника не может равняться ни 960 км, ни 14 метрам, ни даже 80 см, так как это слишком много. Единственное подходящее значение — 2 см.

Далее, ширина реки не может равняться ни 960 км (слишком много), ни 2 см (слишком мало). Ручей шириной 80 см тоже вряд ли будет рекой. Единственное подходящее значение — 14 м.

Стол не может иметь высоту ни в 960 км, ни в 14 м (слишком много), ни в 2 см (слишком мало). Единственное подходящее значение — 80 см.

Наконец, расстояние между крупными городами Ростовом-на-Дону и Москвой (которое не все знают) явно больше 14 м, потому единственное правдоподобное значение составляет 960 км.

Таким образом, мы получили соответствие: А-2, Б-3, В-4, Г-1.

68. Заметим, что лист бумаги весит намного меньше, чем 1,1 кг, значит, он может весить лишь 5 г. Пассажирский самолёт — это самый тяжёлый объект из представленных. Значит, его масса может быть равна 150 т. Сборник задач (книга) не может весить ни 70 кг, ни тем более 150 т (это много), ни 5 г (мало), единственное подходящее значение — 1,1 кг. Наконец, для сербернара осталось единственное не задействованное значение в 70 кг. Таким образом, мы получили соответствие: А-2, Б-4, В-3, Г-1.

72. Ясно, что площадь одной риски на циферблате наручных часов меньше площади одной клавиши на ноутбуке. Так же площадь одной клавиши на ноутбуке меньше площади оконного стекла в квартире, а эта площадь, в свою очередь, меньше площади городского парка. (В<А<Б<Г).

С другой стороны $2{,}5 \text{ см}^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, $10 \text{ га} = 100\,000 \text{ м}^2$, $7 \text{ мм}^2 = 7 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2$. Таким образом, если расставить варианты возможных значений в порядке возрастания, то получим последовательность: 3) 1) 4) 2). Значит, приходим к соответствию В-3,А-1,Б-4, Г-2 или, что то же самое, А-1, Б-4, В-3, Г-2.

76. Упорядочим величины в левом столбце по возрастанию объёма, то есть, грубо говоря, по «месту, занимаемому ими в пространстве». Ясно, что объём рисового зёрнышка меньше объёма стержня в гелевой авторучке. Объём стержня в гелевой авторучке меньше объём бревна для строительства дома. Объём бревна для строительства дома меньше объёма кузова самосвала (В<Б<А<Г).

Упорядочим по возрастанию численные величины в столбце «Возможные значения», предварительно приведя их к общей единице измерения. Ясно, что 6,6 м^3 $= 6{,}6 \cdot 10^6$ см^3; 5 мм^3 $= 5 \cdot 10^{-3}$ см^3; 250 дм^3 $=$ $250 \cdot 10^3$ см^3 $= 2{,}5 \cdot 10^5$ см^3. Таким образом, если расставить варианты возможных значений в порядке возрастания, то получим последовательность: 2) 3) 4) 1). Значит, приходим к соответствию В-2,Б-3,А-4, Г-1 или, что то же самое, А-4, Б-3, В-2, Г-1.

80. Ясно, что продолжительность футбольного матча с учётом добавленного времени меньше продолжительности светового дня в Москве. Продолжительность светового дня в Москве меньше гарантийного срока для нового мобильного телефона. Наконец, гарантийный срок для нового мобильного телефона явно меньше возраста планеты Юпитер. (А<Г<В<Б).

С другой стороны, 94 минуты $<$ 13 часов $<$ 1 год $<$ 4,6 млрд лет. Таким образом, если расставить варианты возможных значений в порядке возрастания, то получим последовательность: 4) 3) 2) 1). Значит, приходим к соответствию А-4,Г-3,В-2, Б-1 или, что то же самое, А-4, Б-1, В-2, Г-3.

84. Находим на оси абсцисс отметку, соответствующую 15 часам 7 октября, по этой отметке находим искомую массу продукции: 500 (см. рис. 420).

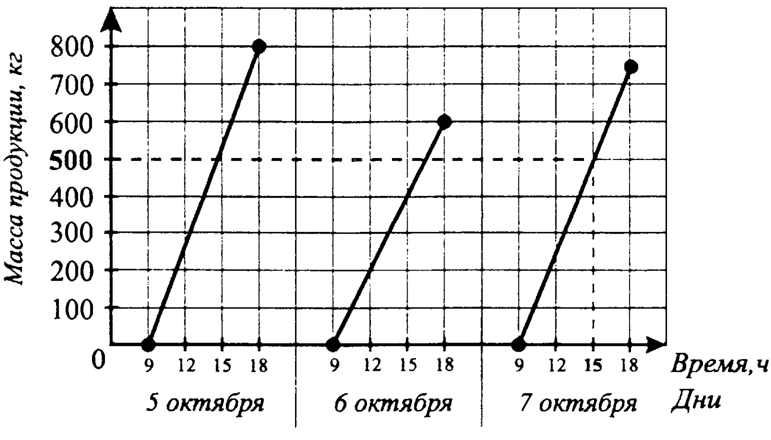


Рис. 420.

90. На графике (см. рис. 421) отметим нужный промежуток времени (ночь с пятницы на субботу). Видим, что ответ — 14 градусов.

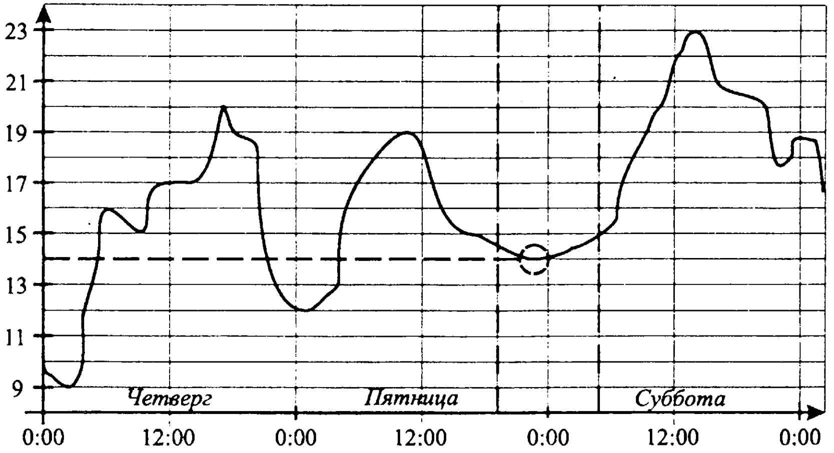


Рис. 421.

95. На графике (см. рис. 422) выделяем временной промежуток — четверг. Находим наименьшее значение 9 и наибольшее 20. Находим разность $20 - 9 = 11$.

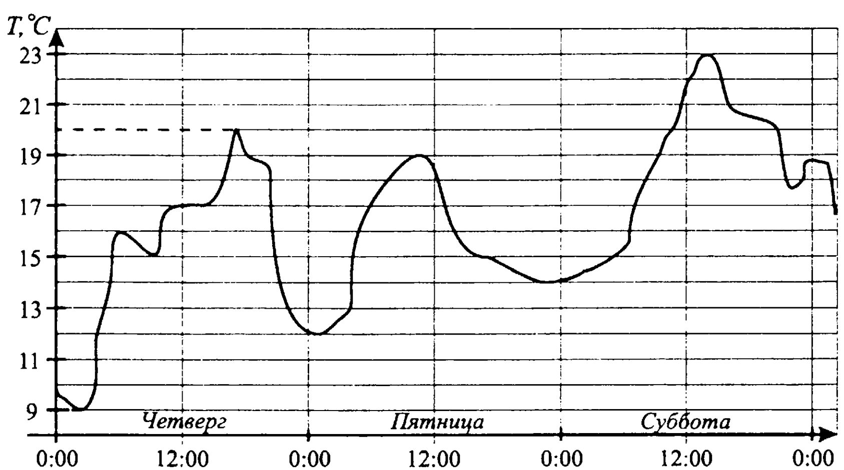


Рис. 422.

98. Положительная температура — та, что больше нуля, выше горизонтальной оси. Считаем месяцы: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Получаем 7 месяцев.

100. Выделим на графике необходимые дни и температуру воздуха (см. рис. 423).

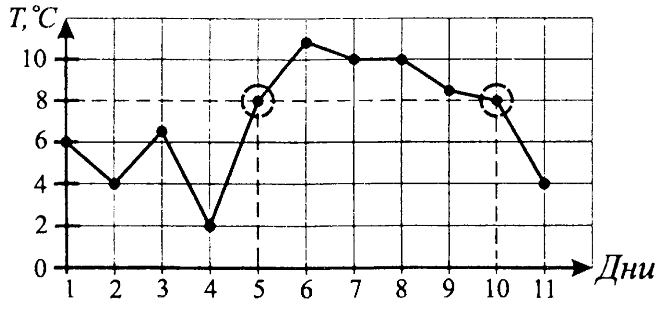


Рис. 423.

Дневная температура воздуха в мае составляла не менее +8 °С с 5 по 10 мая включительно, значит, в эти дни можно проводить посев огурцов. Обратите внимание, что с 5 по 10 включительно — шесть дней.

106. Будем рассматривать правый столбец таблицы, поочерёдно перебирая его строки.

1) Давление возросло на 6 мм ртутного столба. Такая характеристика соответствует только 9 июля, периоду с 06:00 до 12:00. Это пункт Г левого столбца.

2) Давление упало на 8 мм ртутного столба. Такая характеристика соответствует 10 июля, периоду с 18:00 до 00:00. Это пункт Б левого столбца.

3) Давление не изменилось. Такая характеристика соответствует только 9 июля, периоду с 12:00 до 18:00 июля. Это пункт В левого столбца.

4) Показание давления было наибольшим. Наибольшее значение давление принимало 9 июля в 06:00. Это соответствует пункту А левого столбца.

Теперь заполним таблицу, учитывая полученные компоненты ответа: А-4, Б-1, В-3, Г-2.

111. 20 стёкол площадью 0,85 $м^2$ каждое составят общую площадь 17 $м^2$. Чтобы узнать стоимость стекла, нужно его цену умножить на площадь. Чтобы узнать стоимость резки стекла, нужно число стёкол (20) умножить на стоимость резки за одно стекло. Потом нужно результаты сложить и получить стоимость заказа. Для фирмы А стоимость заказа равна $180 \cdot 17 + 40 \cdot 20 = 3860$ рублей. Для фирмы Б стоимость заказа равна $200 \cdot 17 + 35 \cdot 20 = 4100$ рублей. Для фирмы В стоимость заказа равна $220 \cdot 17 = 3740$ рублей. Так как стоимость заказа больше 3500 руб., то в фирме В резка обойдётся бесплатно. Следовательно, самый дешёвый заказ будет стоить 3740 рублей.

114. Автомобиль расходует 7 литров бензина на 100 километров пути, расстояние равно 1100 км (в 11 раз больше, чем 100 км), тогда бензина понадобится $7 \cdot 11 = 77$ литров. Вычисляем стоимость 77 литров бензина по цене 23,8 рубля за литр: $77 \cdot 23{,}8 = 1832{,}6$ рубля. Три билета на автобус будут стоить $3 \cdot 1200 = 3600$ рублей. Значит, автомобильная поездка будет самой дешёвой, её стоимость составит 1832,6 рубля.

117. Для стен из керамзитоблоков необходимо 520 штук керамзитоблоков по 40 рублей за штуку и 3 мешка цемента по 180 рублей за мешок, то есть $520 \cdot 40 + 3 \cdot 180 = 20\,800 + 540 = 21\,340$ рублей.

Для стен из кирпича необходимо 2 500 штук кирпичей по 8 рублей за штуку и 7 мешков цемента по 180 рублей за мешок, то есть $2\,500 \cdot 8 + 7 \cdot 180 = 20\,000 + 1\,260 = 21\,260$ рублей.

Наиболее дешёвый вариант стоимости материала будет для стен из кирпича и составит 21 260 рублей.

120. Посчитаем расстояния от A до C по разным дорогам и время в пути. Грузовик едет через пункт D, проезжая $76+40 = 116$ км со средней скоростью 40 км/ч. Чтобы найти время в пути, нужно расстояние разделить на среднюю скорость: $116 : 40 = 2{,}9$ ч. Автобус едет через пункт E, его путь равен $105 + 9 = 114$ км. Он едет со средней скоростью 48 км/ч, время поездки $114 : 48 = 2{,}375$ ч. Через пункт B едет легковой автомобиль со средней скоростью 70 км/ч. Его путь $63 + 27 = 90$ км. Найдём время в пути легкового автомобиля. Оно равно $90 : 70 = 1{,}2\ldots$ ч. В ответе получится бесконечная десятичная дробь, но её точное значение нам не нужно, так как в задаче спрашивалось: «Какой автомобиль добрался до пункта C позже других?» Видим, что самое большое время в пути у грузовика, поэтому он и приедет позже всех.

123. Стоимость заказа складывается из стоимости подачи машины, стоимости минимальной поездки и стоимости минут сверх продолжительности минимальной поездки (для фирм B и C это 45 мин минус 20 или 10 мин соответственно). Заполним таблицу.

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность минимальной поездки,	Сумма за минимальную поездку	Стоимость 1 минуты сверх минимальной поездки	Число минут сверх минимума	Сумма сверх минимальной	Всего
А	50 руб.	Нет	—	3 руб.	45 мин	135 руб.	185 руб.
В	30 руб.	20 мин	50 руб.	6 руб.	25 мин	150 руб.	230 руб.
С	Беспл.	10 мин	60 руб.	4 руб.	35 мин	140 руб.	200 руб.

Видим, что заказ будет стоить дешевле всего в фирме А, сумма этого заказа 185 рублей.

125. Посчитаем скидки (в рублях), которые клиент мог бы предположительно получить. Скидка 30% от 200 рублей на звонки абонентам других сотовых компаний в своём регионе составит $200 : 100 \cdot 30 = 60$ рублей. Скидка 15% от 300 рублей на звонки абонентам стационарных телефонов составит $300 : 100 \cdot 15 = 45$ рублей. Скидка 25% на услуги мобильного интернета составит $260 : 100 \cdot 25 = 65$ рублей. Наиболее выгодная скидка составит 65 рублей.

128. Подставим данные таблицы в формулу для вычисления рейтинга.

$$R_1 = \left(\frac{2\cdot(-4)+2\cdot4+4\cdot(-4)}{12}+2\right)\cdot25 = 16{,}6\ldots \approx 17;$$

$$R_2 = \left(\frac{2\cdot0+2\cdot(-1)+4\cdot3}{12}+2\right)\cdot25 = 70{,}8\ldots \approx 71;$$

$$R_3 = \left(\frac{2\cdot1+2\cdot1+4\cdot1}{12}+2\right)\cdot25 = 66{,}6\ldots \approx 67;$$

$$R_4 = \left(\frac{2\cdot(-2)+2\cdot4+4\cdot0}{12}+2\right)\cdot25 = 58{,}3\ldots \approx 58.$$

Наибольший рейтинг $R_2 \approx 71$.

134. Из чего складывается сумма вклада к концу года? Из первоначального вклада минус плата за ведение счёта, а также процентов от полученной суммы. Посчитаем сначала итоговую сумму без процентов. В банке А эта сумма будет равна $10\,000 - 120 = 9880$ рублей, в банке Б — $10\,000 - 15 \cdot 12 = 9820$ рублей, в банке С — 10 000 рублей.

Теперь посчитаем проценты по вкладу. 8% от 9880 равно $9880 : 100 \cdot 8 = 790{,}4$ рублей в банке А. 8,5% от 9820 равно

9820 : 100 · 8,5 = 834,7 рублей в банке B. 7,5% от 10 000 равно 10 000 : 100 · 7,5 = 750 рублей в банке C.

Заполним таблицу.

Банк	Обслуживание счёта	Обслуживание счёта в год	Итоговая сумма без процентов	Процентная ставка (% годовых)	Сумма % по вкладу (в руб.)	Вклад к концу года в руб.
A	120 руб. в год	−120 руб.	9880	8	+790,4	10 670,4
B	15 руб. в месяц	−180 руб.	9820	8,5	+834,7	10 654,7
C	Бесплатно	—	10 000	7,5	+750	10 750

Видим, что к концу года вклад окажется наибольшим в банке C и будет равен 10 750 рублей.

137. По двухтарифному счётчику Иван Семёнович за каждый месяц за дневное время заплатил больше на 110 · (3,43 − 3,23) = 22 руб., а в ночное время меньше на 135 · (3,23 − 2,68) = 74,25 руб. Экономия за месяц 74,25 − 22 = 52,25 руб., за год 52,25 · 12 = 627 рублей.

139. По условию задачи нас интересуют лишь учащиеся, не набравшие 70 баллов по химии, то есть те, кто набрал *строго* меньше, к ним относятся учащиеся с номерами 1, 2, 4, 6, 8, 9. Поочерёдно проанализируем результаты этих шести человек.

Учащийся с номером 1 не получил похвальной грамоты, так как, во-первых, не набрал 70 баллов и по физике и, во-вторых, в сумме имеет $58 + 63 = 121$ балл, а неравенство $121 > 125$ неверно.

Учащийся с номером 2 получил похвальную грамоту, так как набрал 74 балла по физике.

Учащийся с номером 4 получил похвальную грамоту, так как в сумме имеет $58 + 68 = 126 > 125$ баллов.

Учащийся с номером 6 не получил похвальной грамоты, так как, во-первых, не набрал 70 баллов по физике и, во-вторых, в сумме имеет $41 + 54 = 95$ баллов, а неравенство $95 > 125$ неверно.

Учащийся с номером 8 тоже не получил похвальной грамоты, так как не набрал 70 баллов по физике и в сумме набрал $62 + 63 = 125$ баллов, причём неравенство $125 > 125$ неверно.

Учащийся с номером 9 получил похвальную грамоту, так как набрал 93 балла по физике.

142. Так как Алевтина должна купить хотя бы одну упаковку сока, содержащего лимон, то ей необходимо купить сок № 1 или сок № 3 (или оба вместе).

Предположим, что Алевтина купила сок № 1, который является импортным. Тогда ей надо купить ещё хотя бы одну упаковку отечественного сока, то есть либо сока № 3, либо сока № 4. Упаковки сока № 1 и сока № 3 вместе стоят $310 + 230 = 540$ (рублей). Но Алевтина предполагает потратить не более 600 рублей в сумме, то есть на третью упаковку сока остаётся $600 - 540 = 60$ (рублей), чего недостаточно. Аналогично, упаковки сока № 1 и сока № 4 вместе стоят $310 + 120 = 430$ (рублей). На оставшиеся $600 - 430 = 170$ (рублей) нельзя купить никакую упаковку сока, отличную от уже приобретённых. Значит, Алевтина не может купить упаковку сока № 1 и при этом соблюсти все условия.

Но тогда надо купить упаковку сока № 3, также содержащего лимон. Сок № 3 — отечественный. Значит, Алевтине придётся купить ещё хотя бы одну упаковку импортного сока, то есть либо сока № 2, либо сока № 5, либо сока № 6 (сок № 1 уже исключён).

Упаковки сока № 3 и сока № 2 вместе стоят $230 + 180 = 410$ (рублей), на оставшиеся 190 рублей можно купить упаковку сока № 4. Таким образом, набор номеров соков 234 является ответом и задача решена (так как достаточно указать хотя бы один подходящий набор).

Аналогично, можно было получить: упаковки сока № 3 и сока № 4 вместе стоят $230 + 200 = 430$ (рублей), на оставшиеся 170 рублей можно купить упаковку сока № 4. Таким образом, набор номеров соков 345 тоже является ответом.

Упаковки сока № 3 и сока № 6 суммарно стоят $230 + 380 = 610$ (рублей), что уже превышает допустимый лимит в 600 рублей.

145. Пусть скорость первого байкера равна x км/ч. Обозначим через s половину расстояния между городами. Первый байкер проехал $2s$ км за время $\frac{2s}{x}$ ч. Второй байкер проехал первую половину пути (то есть s) со скоростью 80 км/ч за время $t = \frac{s}{80}$ ч, а вторую — со скоростью на 24 км/ч больше, чем скорость первого байкера (то есть $(x + 24)$ км/ч) за время $\frac{s}{(x+24)}$ ч. Заполним таблицу для составления уравнения.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
1-й байкер	$2s$	x	$\frac{2s}{x}$
2-й байкер (1-я половина пути)	s	80	$\frac{s}{80}$
2-й байкер (2-я половина пути)	s	$x+24$	$\frac{s}{x+24}$

Так как по условию время движения первого байкера равно времени движения второго байкера, то имеет место следующее уравнение:

$$\frac{2s}{x} = \frac{s}{80} + \frac{s}{x+24}.$$

Разделив обе части последнего равенства на s (где $s > 0$), получим

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{80} + \frac{1}{x+24}, \qquad \Big| \times 80x(x+24) \neq 0,$$

$160\,(x+24) = x\,(x+24) + 80x,$

$x^2 - 56x - 3840 = 0,$

$x_1 = -40, \quad x_2 = 96.$

Первый корень явно не подходит по смыслу задачи, потому что скорость должна быть положительна. Следовательно, скорость первого байкера 96 км/ч.

149. Обозначим скорость катера в стоячей воде через x км/ч. Тогда скорость катера по течению равна $(x + 1)$ км/ч, а против течения — $(x - 1)$ км/ч. Заполним таблицу по условию задачи.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По течению	180	$x+1$	$\frac{180}{x+1}$
Против течения	180	$x-1$	$\frac{180}{x-1}$

Составим и решим уравнение.

$$\frac{180}{x-1} - \frac{180}{x+1} = 1, \qquad \Big| \times (x-1)(x+1) \neq 0,$$

$180(x+1) - 180(x-1) = (x-1)(x+1),$

$180x + 180 - 180x + 180 = x^2 - 1,$

$x^2 = 361,$

$x_1 = -19, \quad x_2 = 19.$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, скорость катера в стоячей воде равна 19 км/ч.

153. Обозначим безостановочную скорость через x км/ч. Тогда скорость движения на обратном пути равна $(x + 5)$ км/ч. Табличная версия задачи имеет следующий вид:

	Расстояние (км)	**Скорость (км/ч)**	**Время (ч)**
Из города на побережье	6800	x	$\frac{6800}{x}$
Обратный путь	6800	$x+5$	$\frac{6800}{x+5}+5$

Составим и решим уравнение.

$$\frac{6800}{x} = \frac{6800}{x+5} + 5, \qquad \Big| \times x(x+5) \neq 0,$$
$$6800(x+5) = 6800x + 5x(x+5),$$
$$5x^2 + 25x - 6800 \cdot 5 = 0, \qquad \Big| : 5,$$
$$x^2 + 5x - 6800 = 0,$$
$$D = 27225 = 1089 \cdot 25,$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{1089 \cdot 25} = 33 \cdot 5 = 165,$$
$$x_1 = -85, \quad x_2 = 80.$$

Итак, скорость экипажа дальнобойщиков по пути из города к побережью равна 80 км/ч.

156. Скорость поезда: $v = 75 \text{ км/ч} = \frac{75 \cdot 1000\text{м}}{3600\text{с}} = \frac{250}{12}$ м/с.

За 24 с поезд пройдёт расстояние $S = \frac{250}{12} \cdot 24 = 500$ (м).

Найдём длину поезда: $500 - 150 = 350$ (м).

160. Средняя скорость находится так: всё пройденное расстояние делится на затраченное время. Найдём расстояние, которое проехал автомобиль. $60 \cdot 2 + 110 \cdot 1 + 85 \cdot 2 = 400$ (км). Время, затраченное на весь путь, равно $2 + 1 + 2 = 5$ (ч). Средняя скорость равна $400 : 5 = 80$ (км/ч).

163. Пусть второй геймер собирает x бонусов в минуту, тогда первый собирает $x+20$ бонусов в минуту. Табличная версия задачи имеет следующий вид:

	Число бонусов	Скорость сбора (бонусы/мин)	Время сбора (мин)
Первый геймер	2400	$x+20$	$\dfrac{2400}{x+20}$
Второй геймер	2400	x	$\dfrac{2400}{x}$

Составим и решим уравнение.

$$\frac{2400}{x} - \frac{2400}{x+20} = 20,$$

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+20} = 1,$$

$$120x + 2400 - 120x = x^2 + 20x,$$

$$x^2 + 20x - 2400 = 0,$$

$$x_1 = -60, \quad x_2 = 40.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, второй геймер собирает 40 бонусов в минуту.

166. Пусть второй насос закачивает x литров в минуту, тогда первый — $x+5$ литров в минуту. Заполним следующую таблицу:

	Скорость закачки (л/мин)	Объём бака (л)	Время наполнения (мин)
1-й насос	$x+5$	600	$\dfrac{600}{x+5}$
2-й насос	x	600	$\dfrac{600}{x}$

По условию первый насос тратит на 6 минут меньше второго. Составим и решим уравнение.

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+5} = 6,$$

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x+5} = 1,$$

$$100x + 500 - 100x = x(x+5),$$

$$x^2 + 5x - 500 = 0,$$

$$x_1 = -25, \quad x_2 = 20.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Итак, второй насос закачивает 20 литров в минуту.

170. Пусть Винни Пух поливает самостоятельно весь огород (берём его за 1) за B минут, Пятачок — за P минут, а Кролик — за K минут. Тогда за одну минуту Винни поливает часть огорода, равную $\frac{1}{B}$, Пятачок — $\frac{1}{P}$, Кролик — $\frac{1}{K}$. Таким образом, сообщение о том, что Винни и Пятачок вместе поливают огород за 35 минут, математически выражается следующим уравнением:

$\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P}\right) \cdot 35 = 1$, что равносильно уравнению $\frac{1}{B} + \frac{1}{P} = \frac{1}{35}$.

Составив аналогично два других уравнения, получим систему

$$\begin{cases} \frac{1}{B} + \frac{1}{P} = \frac{1}{35}, \\ \frac{1}{P} + \frac{1}{K} = \frac{1}{63}, \\ \frac{1}{B} + \frac{1}{K} = \frac{1}{45}. \end{cases}$$

Сложив все уравнения системы, получим

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{45}.$$

Приведём правую часть к общему знаменателю:

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{9}{315} + \frac{5}{315} + \frac{7}{315},$$

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{21}{315},$$

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K} = \frac{1}{30},$$

$$30\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = 1.$$

Последнее равенство означает, что Винни, Пятачок и Кролик польют вместе огород за 30 минут.

174. Найдём массу вещества, содержащегося в растворе:

$12 \text{ кг} \cdot 0{,}08 = 0{,}96 \text{ кг}.$

В раствор добавили 4 кг воды, получили 12 кг + 4 кг = 16 кг раствора, в котором содержится 0,96 кг вещества.

Найдём процент концентрации получившегося раствора:

$$\frac{0{,}96 \cdot 100\%}{16} = 6\%.$$

178. Пусть в I сосуде x кг кислоты, а во II сосуде y кг кислоты.

Тогда $x + y = (75 + 50) \cdot 0{,}42$; $x + y = 52{,}5$.

Доля кислоты в I сосуде — $\frac{x}{75}$.

Доля кислоты во II сосуде — $\frac{y}{50}$.

Если смешать равные массы m этих растворов, то

$$\frac{m \cdot x}{75} + \frac{m \cdot y}{50} = 2m \cdot 0{,}5, \quad \frac{x}{75} + \frac{y}{50} = 1, 2x + 3y = 150.$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 52{,}5, \\ 2x + 3y = 150; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -105, \\ 2x + 3y = 150; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 45, \\ x + y = 52{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 45, \\ x = 7{,}5. \end{cases}$$

Значит, в первом сосуде 7,5 кг кислоты.

182. Пусть x рублей — зарплата жены,
y рублей — зарплата мужа,
z рублей — стипендия сына,
$(x + y + z)$ рублей — бюджет семьи.

Если бы зарплата жены увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 37,5%.

Составим 1-е уравнение: $2x + y + z = 1{,}375 \cdot (x + y + z)$.
$x + (x + y + z) = 0{,}375 \cdot (x + y + z) + (x + y + z)$, $x = 0{,}375 \cdot (x + y + z)$,

$$\frac{x}{x + y + z} = 0{,}375.$$

Если бы зарплата мужа уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 39%.

Составим 2-е уравнение: $x + \frac{1}{3}y + z = 0{,}61(x + y + z)$.

$3x + y + 3z = 1{,}83(x + y + z)$, $2x + 2z + (x + y + z) = 1{,}83(x + y + z)$,

$$\frac{2x}{x + y + z} + \frac{2z}{x + y + z} + 1 = 1{,}83.$$

Сделаем подстановку $\dfrac{x}{x+y+z} = 0{,}375$:

$$2 \cdot 0{,}375 + \frac{2z}{x+y+z} = 0{,}83, \quad \frac{2z}{x+y+z} = 0{,}83 - 0{,}75,$$

$$\frac{z}{x+y+z} = 0{,}08 : 2, \quad \frac{z}{x+y+z} = 0{,}04.$$

Таким образом, стипендия сына составляет 4% от общего дохода семьи.

185. Общее число исходов равно числу карточек — их 24. Благоприятных исходов 6 (так как номер 3 написан на шести карточках). Искомая вероятность равна $\dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

192. Общее число исходов равно числу шаров: $14 + 9 + 7 = 30$. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 9. Искомая вероятность равна $\dfrac{9}{30} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

195. Так как школьник может ответить на 17 билетов, то на 3 билета он ответить не может. Вероятность получить один из этих билетов по определению равна $\dfrac{3}{20} = \dfrac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \dfrac{15}{100} = 0{,}15$.

200. Всего 20 спортсменок, у всех равные шансы выступать седьмой. Поэтому имеются 20 равновероятных исходов. Из Франции $20 - 6 - 5 = 9$ спортсменок, поэтому имеются 9 благоприятных для указанного события исходов. Искомая вероятность равна $\dfrac{9}{20} = \dfrac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \dfrac{45}{100} = 0{,}45$.

203. Сначала найдём, сколько докладов запланировано на последний день. На первые три дня запланировано $12 \cdot 3 = 36$ докладов. Остаются ещё $50 - 36 = 14$ докладов, которые распределяются поровну между оставшимися двумя днями, поэтому в последний день запланировано $\dfrac{14}{2} = 7$ докладов.

Будем считать исходом порядковый номер доклада профессора Н. Всего таких равновозможных исходов 50. Благоприятствуют указанному событию 7 исходов (последние 7 номеров в списке докладов). Искомая вероятность равна $\dfrac{7}{50} = \dfrac{7 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \dfrac{14}{100} = 0{,}14$.

206. При выборе кофемолки наугад возможны 1000 исходов, событию A «выбранная кофемолка бракованная» благоприятны 7 исходов. По определению вероятности $P(A) = \dfrac{7}{1000} = 0{,}007$.

207. Эта задача похожа на предыдущую. Однако формулировка «**на** 100 качественных холодильников приходится 15 с дефектами» указывает нам, что дефектные 15 штук не входят в 100 качественных. Поэтому общее число исходов равно $100 + 15 = 115$ (равно общему числу холодильников), благоприятных исходов 100. Искомая вероятность равна $\dfrac{100}{115}$. Для подсчёта приближённого значения дроби $\dfrac{100}{115}$ удобно воспользоваться делением уголком:

```
_100,000 |115
  920    |0,869...
  _800
   690
  _1100
   1035
    ...
```

Таким образом, $\dfrac{100}{115} \approx 0{,}87$.

209. Как и в предыдущей задаче, необходимо внимательно прочитать условие и понять, что является исходом, а что — благоприятным исходом (так, неосмысленное применение формулы вероятности приводит к неправильному ответу $\dfrac{7}{16}$).

Здесь исход — это соперник Максима Зайцева. Так как всего теннисистов 16, а сам с собой Максим играть не может, то имеется $16-1 = 15$ равновероятных исходов. Благоприятный исход — соперник из России. Таких благоприятных исходов $7 - 1 = 6$ (из числа россиян исключаем самого Максима). Искомая вероятность равна $\dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

212. Сформируем команды, последовательно помещая футболистов на свободные места, при этом начнём с Антона и Дмитрия. Сначала поместим Антона на случайно выбранное место из свободных 33. Теперь помещаем на свободное место Дмитрия (исходом будем считать выбор места для него). Всего имеется 32 свободных места (одно уже занял Антон), поэтому всего возможны 32 исхода. В одной команде с Антоном остаётся 10 свободных мест, поэтому событию «Антон и Дмитрий в одной команде» благоприятствуют 10 исходов. Вероятность этого события равна $\frac{10}{32} = \frac{5}{16} = \frac{5 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{3125}{10\,000} = 0{,}3125$.

215. В задачах про бросание монет удобно выписать все возможные исходы, записывая их при помощи букв Р (решка) и О (орёл). Так, исход ОР означает, что при первом броске выпал орёл, а при втором — решка. В рассматриваемой задаче возможны 4 исхода[1]: РР, РО, ОР, ОО. Благоприятствуют событию «решка выпадет ровно один раз» 2 исхода: РО и ОР. Искомая вероятность равна $\frac{2}{4} = 0{,}5$.

219. Исходом будем считать пару чисел: очки при первом и втором броске. Тогда указанному событию благоприятствуют следующие исходы: $2-6$, $3-5$, $4-4$, $5-3$, $6-2$. Их количество равно 5.

222. Исходом будем считать пару чисел: очки, выпавшие на первой и второй игральной кости. Всего имеется 36 равновозможных исходов[2] (на первой кости число от 1 до 6, на второй — также число от 1 до 6). Событию «в сумме выпало 4» благоприятствуют следующие исходы: $1-3$, $2-2$, $3-1$. Их количество равно 3. Искомая вероятность равна $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Для подсчёта приближённого значения дроби $\frac{1}{12}$ удобно воспользоваться делением уголком:

$$\begin{array}{r|l} -1{,}000 & 12 \\ \underline{96} & \overline{0{,}083\ldots} \\ -40 & \\ \underline{36} & \\ \ldots & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{1}{12} \approx 0{,}08$.

226. Обозначим события: $W =$ «А. выиграл белыми», $B =$ «А. выиграл чёрными». По условию, $P(W) = 0{,}45$, $P(B) = 0{,}4$. Необходимо найти вероятность пересечения событий W и B, то есть $P(W \cap B)$. События W

[1] Вообще, если монету бросают n раз, то имеются 2^n равновозможных исходов.

[2] Вообще, если бросают n игральных костей (кубиков), то имеются 6^n равновозможных исходов. Столько же исходов получается, если один и тот же кубик бросают n раз подряд.

и B независимы (результат одной партии не зависит от результата другой), поэтому $P(W \cap B) = P(W) \cdot P(B) = 0{,}45 \cdot 0{,}4 = 0{,}18$.

228. Вероятность того, что из магазина А не доставят товар, равна $1 - 0{,}85 = 0{,}15$. Вероятность того, что из магазина Б не доставят товар, равна $1 - 0{,}96 = 0{,}04$. Так как магазины работают независимо, то вероятность отсутствия доставки из обоих магазинов сразу (то есть пересечение вероятностей отсутствия доставки из каждого магазина) равна $0{,}15 \cdot 0{,}04 = 0{,}006$.

231. Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 события, означающие попадание в мишень при соответствующем выстреле. По условию $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = 0{,}6$. Нам необходимо найти вероятность $P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5})$. Так как рассматриваемые события независимы, то эта вероятность равна $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) \cdot P(\overline{A_5}) =$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 =$
$= 0{,}36 \cdot 0{,}064 = 0{,}02304 \approx 0{,}02$.

235. Расставим на перекрёстках стрелки в направлениях, по которым может двигаться мышка (см. рис. 424). Выберем на каждом из перекрёстков одно направление из двух возможных и будем считать, что при попадании на перекрёсток мышка будет двигаться по выбранному нами направлению.

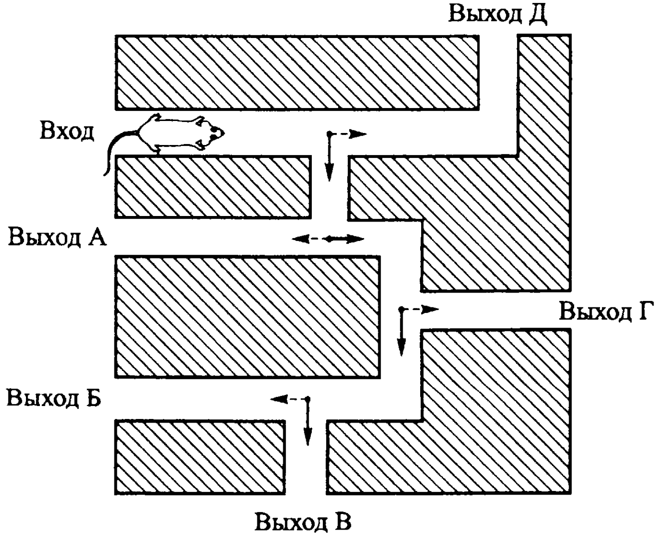


Рис. 424.

Чтобы мышка достигла выхода В, нужно, чтобы на каждом перекрёстке было выбрано направление, обозначенное сплошной линией. Всего выбор направления делается 4 раза, каждый раз независимо от предыдущего выбора. Вероятность того, что каждый раз выбрана сплошная стрелка, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5^4 = 0{,}25^2 = 0{,}0625$.

238. Представим себе, что все 25 учеников выстроены в ряд, причём первыми стоят 16 мальчиков. Будем дважды выбирать из этого ряда по одному дежурному, каждый раз случайным образом. Обозначим через A событие «в первый раз выбран один из числа первых 16 (в ряду из 25 учеников)», через B — событие «во второй раз выбран один из числа первых 15 (в ряду из оставшихся 24 учеников)». Тогда $A \cap B$ — это событие «будут дежурить два мальчика», его вероятность нам нужно найти.

События A и B независимы, так как номер выбранного ученика в ряду не зависит от того, кто был выбран до или после. По формуле вероятности пересечения независимых событий

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{16}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

240. Будем рассуждать о том, когда может сломаться кофемолка. Она может сломаться уже на первом году работы, может сломаться на втором году работы, а может проработать более двух лет и сломаться потом. Будем заполнять следующую таблицу:

Событие	сломалась на первом году	сломалась на втором году	сломалась после двух лет работы
Вероятность			

Так как вероятность события «кофемолка прослужит больше года» равна 0,93, то вероятность противоположного события «кофемолка сломалась на первом году» равна $1 - 0{,}93 = 0{,}07$. Вероятность события «кофемолка сломалась после первых двух лет работы» по условию равна 0,81. Вносим найденные значения в таблицу:

Событие	сломалась на первом году	сломалась на втором году	сломалась после двух лет работы
Вероятность	0,07		0,81

В таблице перечислены три несовместных события, одно из которых обязательно произойдёт. Поэтому сумма вероятностей в таблице должна быть равна 1. Следовательно, незаполненное искомое значение можно вычислить как $1 - 0{,}07 - 0{,}81 = 0{,}12$.

243. Так как из 5 револьверов 2 пристреляны, то вероятность схватить пристрелянный револьвер равна $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Вероятность схватить один из трёх непристрелянных револьверов равна $\frac{3}{5} = 0{,}6$.

Обозначим через A событие «Билл схватит пристрелянный револьвер и попадёт из него в муху». Так как события «Билл схватит пристрелянный револьвер» и «Билл попадёт из пристрелянного револьвера в муху» независимы, то $P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$. Аналогично вероятность события B «Билл схватит непристрелянный револьвер и попадёт из него в муху» равна $P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 = 0{,}15$. События A и B несовместны (Билл не может одновременно стрелять как из пристрелянного, так и из непристрелянного револьвера). Искомая вероятность равна
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}32 + 0{,}15 = 0{,}47$.

246.

		Второй матч		
		победа $P = 0{,}3$	ничья $P = 0{,}4$	поражение $P = 0{,}3$
Первый матч	победа $P = 0{,}3$	**0,09**	**0,12**	0,09
	ничья $P = 0{,}4$	**0,12**	0,16	0,12
	поражение $P = 0{,}3$	0,09	0,12	0,09

Числа в ячейках получаются по принципу таблицы умножения (умножение вероятностей соответствующих результатов первого и второго матчей), так как вероятности результатов первого и второго матча не зависят друг от друга. Жирным шрифтом в таблице выделены вероятности тех результатов, при которых команда выходит в следующий круг. Искомая вероятность равна $0{,}09 + 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}33$.

249. Составим таблицу вероятностей возможных результатов в конце дня.

		Второй автомат	
		кофе закончился	кофе остался
Первый автомат	кофе закончился	0,22	
	кофе остался		

По условию вероятность события «кофе закончился в обоих автоматах» равна 0,22. Это число мы сразу записали в соответствующую ячейку таблицы.

В первом автомате кофе закончится с вероятностью 0,4, поэтому сумма чисел в верхних ячейках таблицы должна быть равна 0,4. Значит, в правой верхней ячейке должно быть число $0{,}4 - 0{,}22 = 0{,}18$.

		Второй автомат	
		кофе закончился	кофе остался
Первый автомат	**кофе закончился**	**0,22**	**0,18**
	кофе остался		

Во втором автомате кофе закончится с вероятностью 0,4, поэтому сумма чисел в левых ячейках таблицы также должна быть равна 0,4. Значит, в левой нижней ячейке должно быть число $0{,}4 - 0{,}22 = 0{,}18$.

		Второй автомат	
		кофе закончился	кофе остался
Первый автомат	кофе закончился	**0,22**	0,18
	кофе остался	**0,18**	

Так как сумма чисел во всех четырёх ячейках должна быть равна 1, то искомое число в правой нижней ячейке равно $1-0{,}22-0{,}18-0{,}18 = 0{,}42$.

		Второй автомат	
		кофе закончился	кофе остался
Первый автомат	кофе закончился	0,22	0,18
	кофе остался	0,18	**0,42**

252. Вероятность того, что Н. не сможет набрать 60 баллов ни по литературе, ни по математике равна $(1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04$. Следовательно, хотя бы по одному из этих двух предметов он получит 60 баллов с вероятностью $1 - 0{,}04 = 0{,}96$. Для поступления нужно набрать требуемый балл по русскому языку, истории и хотя бы по одному предмету из литературы и математики. Вероятность поступления равна $0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}96 = 0{,}384$.

255. Подставив в формулу $E = \dfrac{mv^2}{2}$ значения $v = 6$ м/с, $m = 15$ кг, получим $E = \dfrac{15 \cdot 6^2}{2} = \dfrac{15 \cdot 36}{2} = 270$ (Дж).

258. Подставив в формулу $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ значения $a = 4$ и $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$, получим $R = \dfrac{4}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \dfrac{4}{\frac{4}{3}} = 4 \cdot \dfrac{3}{4} = 3$ (Дж).

261. Необходимо произвести расчёт по формуле
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, заданы длины сторон ($a = 5, b = 12, c = 13$).

Значит, в начале нужно найти значение p по формуле $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Получим $p = \dfrac{5+12+13}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$ и

$S = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{900} =$
$= \sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30.$

267. Подставляя в формулу $f = ma$ значения $f = 222\,(\text{Н})$ и $a = 37\,(\text{м/с}^2)$, получим $222 = m \cdot 37$, отсюда $m = \dfrac{222}{37} = 6$.

272. Подставляя в формулу $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$ значения $b = 5$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{6}$ и $\sin\beta = \dfrac{1}{3}$, получим $\dfrac{a}{\frac{1}{6}} = \dfrac{8}{\frac{1}{3}}$, отсюда $6a = 24$, $a = 4$.

275. Заметим, что $1 < b < 2$, $4 < a < 5$ (см. рис. 425).

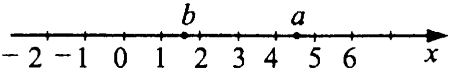


Рис. 425.

Тогда $3 < 3b < 6$, $6 < a + 2 < 7$, то есть $3b < 6 < a + 2$. Наибольшее число — это $(a + 2)$.

276. Заметим, что $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, $23^2 = 529$, $24^2 = 576$, $(\sqrt{500})^2 = 500$. При этом $484 < 500 < 529$, а значит, $22 < \sqrt{500} < 23$. На координатной прямой между отметками 22 и 23 лежат точки N и K. При этом $N < 22{,}5$; $K > 22{,}5$. Заметим, что $22{,}5 = \dfrac{45}{2}$, $\left(\dfrac{45}{2}\right)^2 = \dfrac{2025}{4}$. Сравним числа $\dfrac{2025}{4}$ и 500. Очевидно, что $500 \cdot 4 = 2000$, $\dfrac{2025}{4} > \dfrac{2000}{4}$, тогда $\dfrac{45}{2} > \sqrt{500}$, $\sqrt{500} < 22{,}5$. Значит, $\sqrt{500}$ соответствует точке N.

280. Решим каждое неравенство отдельно.

А) $16^x \geqslant 16$, $16^x \geqslant 16^1$. Ясно, что $16 > 1$, значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $x \geqslant 1$, то есть $x \in [1;\ +\infty)$, что соответствует решению 4).

Б) $\dfrac{1}{16^x} \geqslant 16$, $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x \geqslant 16$, $16^{-x} \geqslant 16^1$. Ясно, что $16 > 1$, значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $-x \geqslant 1$, $x \leqslant -1$, то есть $x \in (-\infty;\ -1]$, что соответствует решению 2).

В) $\log_{16} x \geqslant 1$, ОДЗ $x > 0$. Преобразуем неравенство к виду $\log_{16} x \geqslant \log_{16} 16$. Ясно, что $16 > 1$, значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $x \geqslant 16$, то есть $x \in [16;\ +\infty)$, что соответствует решению 1).

Г) $\log_{16} x \leqslant 1$, ОДЗ $x > 0$. Преобразуем неравенство к виду $\log_{16} x \leqslant \log_{16} 16$. Ясно, что $16 > 1$, значит, на ОДЗ рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $x \leqslant 16$, то есть $x \in (0;\ 16]$, что соответствует решению 3).

286. Решим каждое неравенство отдельно.

А) $3^x \geqslant 3$, $3^x \geqslant 3^1$. Ясно, что $3 > 1$, значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $x \geqslant 1$, что соответствует решению на рисунке 2).

Б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 3$; $3^{-x} \geqslant 3^1$; $x \leqslant -1$, что соответствует решению на рисунке 4).

В) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 3$; $3^{-x} \leqslant 3^1$; $x \geqslant -1$, что соответствует решению на рисунке 1).

Г) $3^x \leqslant 3$; $3^x \leqslant 3^1$; $x \leqslant 1$, что соответствует решению на рисунке 3).

288. Приблизительно оценим каждое значение, стоящее в правом столбце.

а) Из рисунка видно, что $n \approx 1{,}5$, $-2 < m < -1{,}5$. Отсюда видно, что $n + m < 0$, что соответствует только точке A.

б) $m^2 + n^2 > 1{,}5^2 + (-1{,}5)^2 = 4{,}5$, что соответствует только точке D.

в) $\frac{3}{n} \approx \frac{3}{1{,}5} = 2$. Тогда выполняется примерная оценка $0 < \frac{3}{n} + m < 0{,}5$, что соответствует точке B.

г) Считая $n \approx 1{,}5$, получим $3 < n - m < 3{,}5$, что соответствует точке C.

Таким образом, точке A соответствует значение под номером 1, точке B соответствует значение под номером 3, точке C — под номером 4, точке D — под номером 2.

292. $x = 1\frac{5}{12} : \left(-5\frac{2}{3}\right)$,

$$1\frac{5}{12} : \left(5\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{12} : \frac{17}{3} = \frac{17}{12} \cdot \frac{3}{17} = \frac{3}{12} = 3 : 12 = 0{,}25,$$

$x = -0{,}25$.

302. Превратим это уравнение в пропорцию — равенство двух дробей:

$$\frac{2x - 21}{x + 12} = \frac{x}{1}.$$

В пропорции произведение крайних членов равно произведению средних (если говорить образным языком, умножаем крест-накрест):

$$\frac{2x-21}{x+12} = \frac{x}{1}.$$

Получим $x(x+12) = 2x - 21$; $x^2 + 12x = 2x - 21$; $x^2 + 10x + 21 = 0$. Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = -3$; $x_2 = -7$. Убеждаемся, что оба числа являются корнями исходного уравнения, и пишем в ответ бóльшее из них.

311.
$$\left(\sqrt{\frac{5x+39}{16}}\right)^2 = \frac{1}{4},$$
$$\frac{5x+39}{16} = \frac{4}{16},$$
$$5x + 39 = 4,$$
$$5x = 4 - 39,$$
$$5x = -35,$$
$$x = -7.$$

Проверка: $\sqrt{\dfrac{5\cdot(-7)+39}{16}} = \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{\dfrac{4}{16}} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

320.
$$5^{2x+4} = 5^{-2},$$
$$2x + 4 = -2,$$
$$2x = -2 - 4,$$
$$x = -3.$$

331. По определению логарифма:
$$x + 8 = 2^5,$$
$$x + 8 = 32,$$
$$x = 24.$$

Проверяем: $x + 8 = 24 + 8 > 0$. Вообще говоря, проверка здесь не нужна.

335.
$$\log_5(3x-9) = \log_5 6^2,$$
$$3x - 9 = 6^2,$$
$$3x - 9 = 36,$$
$$3x = 36 + 9,$$
$$3x = 45,$$
$$x = 15.$$

Проверка: $\log_5(3\cdot 15 - 9) = 2\log_5 6$,
$\log_5(36) = \log_5 36$,
$x = 15$ — корень уравнения.

343. 1) $-\frac{7}{8}+4\frac{2}{3}=-\frac{7}{8}+\frac{4\cdot 3+2}{3}=-\frac{7}{8}+\frac{14}{3}=$

$=-\frac{7}{8}^{\backslash 3}+\frac{14}{3}^{\backslash 8}=-\frac{21}{24}+\frac{112}{24}=\frac{112-21}{24}=\frac{91}{24}.$

2) $\frac{91}{24}\cdot 9{,}6=\frac{91}{24}\cdot 9\frac{6}{10}=\frac{91}{24}\cdot\frac{96}{10}.$

Сокращаем 96 и 24, $96:24=4$,

$\frac{91}{24}\cdot\frac{96}{10}=\frac{91\cdot 4}{10}=\frac{364}{10}=36\frac{4}{10}=36{,}4.$

345. $5^7\cdot 5^{10}:5^{15}=5^{7+10-15}=5^2=25.$

350. $2^{\sqrt{12}-6}\cdot 2^{3-\sqrt{12}}=2^{\sqrt{12}-6+3-\sqrt{12}}=2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=0{,}125.$

353. $\frac{14\sqrt[18]{x}\sqrt[9]{x}}{\sqrt[6]{x}}=\frac{14x^{\frac{1}{18}}x^{\frac{1}{9}}}{x^{\frac{1}{6}}}=14x^{\frac{1}{18}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}}=14x^{\frac{1}{18}+\frac{2}{18}-\frac{3}{18}}=14.$

357. $\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a-7)^2}=|a-5|+|a-7|$. Так как $a>5$, то $|a-5|=a-5$. Так как $a<7$, то $|a-7|=7-a$. Значит, $|a-5|+|a-7|=(a-5)+(7-a)=7-5=2.$

359. $6^{2\log_6 5}=6^{\log_6 5^2}=5^2=25.$

362. $\log_7 4{,}9+\log_7 10=\log_7(4{,}9\cdot 10)=\log_7 49=\log_7(7^2)=2.$

365. $\log_{16}\log_3 9=\log_{16}2=\log_{2^4}2=\frac{1}{4}\log_2 2=\frac{1}{4}=0{,}25.$

367. $\frac{\log_{25}7}{\log_{625}7}=\frac{\log_{25}7}{\log_{25^2}7}=\frac{\log_{25}7}{\frac{1}{2}\log_{25}7}=1:\frac{1}{2}=2.$

370. $(1-\log_3 15)(1-\log_5 15)=(\log_3 3-\log_3 15)(\log_5 5-\log_5 15)=$

$=\left(\log_3\frac{3}{15}\right)\left(\log_5\frac{5}{15}\right)=\left(\log_3\frac{1}{5}\right)\left(\log_5\frac{1}{3}\right)=(-\log_3 5)(-\log_5 3)=$

$=\frac{1}{\log_5 3}\cdot\log_5 3=1.$

372. $\frac{3\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ}=\frac{3\cos 35^\circ}{\sin(90^\circ-35^\circ)}=\frac{3\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}=3.$

377. $14\sqrt{6}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}=14\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=14\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=42.$

379. $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = 17 - 1 = 16$. Так как $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{16} = 4$.

383. По графику функции видно, что функция — убывающая, поэтому знак производной в точке касания — «минус». Выберем две точки касательной. Например, $(-2; -9)$ и $(-5; -3)$. Разность их абсцисс $\Delta x = 3$, разность ординат $\Delta y = 6$. Делим Δy на Δx, получаем $6 : 3 = 2$, ставим знак «–».

388. Производная функции $f(x)$ положительна, если функция возрастает.

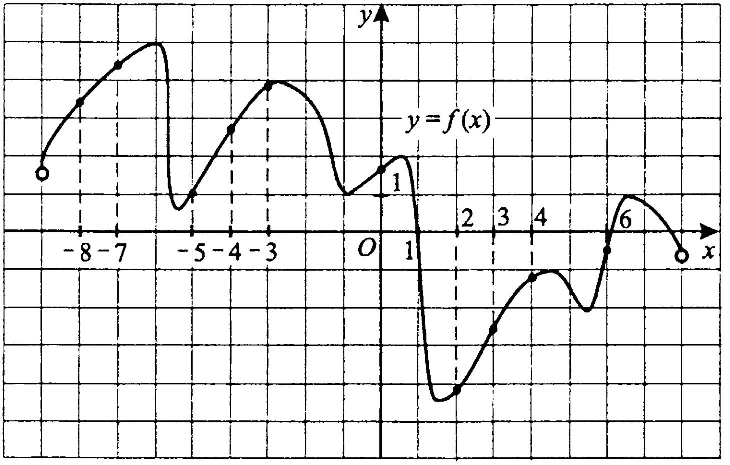


Рис. 426.

На рисунке 426 отмечены точки, принадлежащие промежуткам возрастания, в которых производная функции $f(x)$ положительна. Это точки -8; -7; -5; -4; -3; 0; 2; 3; 4; 6. Количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна, равно 10.

390. Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку производная меняет знак, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox. Производная функции $y = f'(x)$ на отрезке $[-4; 3]$ меняет знак три раза, поэтому количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на данном промежутке равно 3.

394. Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через неё знак производной меняется, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox. Таких точек на интервале $(-3; 3)$ две: $x = -1$ и $x = 2$.

Точка является точкой максимума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку знак производной меняется с «+» на «−». В данном случае точкой максимума является точка $x = -1$ (см. рис. 427).

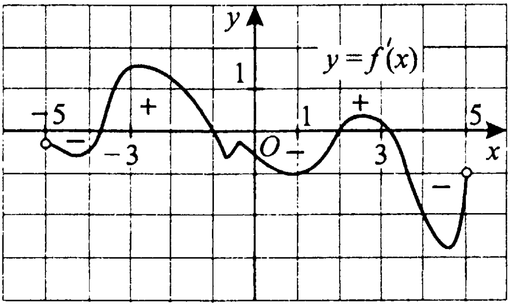


Рис. 427.

398. Расставим знаки производной (см. рис. 428) и выберем промежутки, где производная отрицательна (на них функция убывает). Это и будут промежутки убывания: $[-1; 2]$, $[6; 13]$, $[15; 16)$. Длина наибольшего из них равна $13 - 6 = 7$.

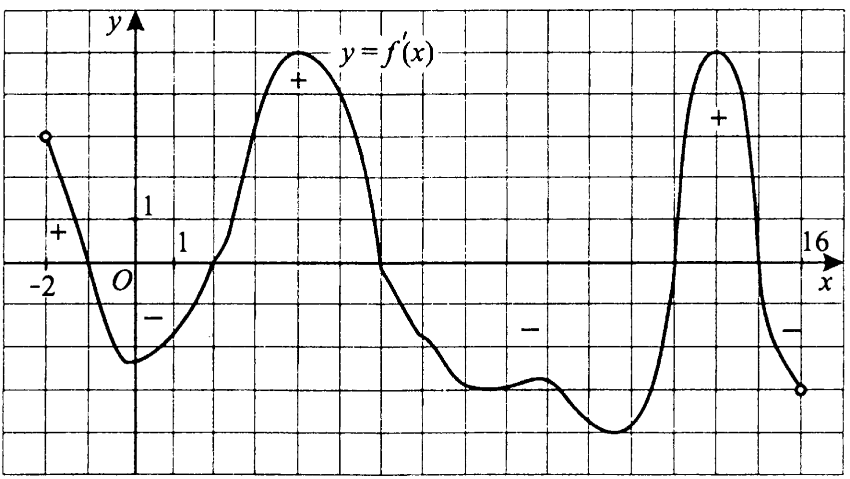


Рис. 428.

403. Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0. $f'(x)$ наименьшее в точке, в которой касательная образует самый маленький тупой угол с осью Ox («горка» в этом месте на вид «самая крутая»). Проведём касательные в заданных точках (см. рис. 429). Тупые углы (а значит, $f'(x) < 0$) в точках $x = -1$ и $x = 4$. $\alpha < \beta$, значит, наименьшая производная в точке 4.

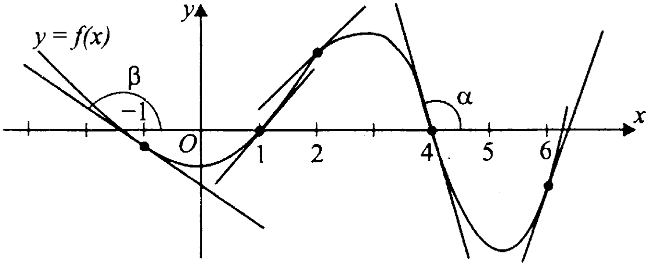


Рис. 429.

407. Касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x+1$ или совпадает с ней, если её угловой коэффициент $k = 1$. Но значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания, то есть нам нужно найти точки, в которых производная $f'(x) = 1$. Построим прямую $y = 1$, параллельную оси Ox (см. рис. 430). Видим, что прямая и график функции имеют 4 общие точки. Это и значит, что $f'(x) = 1$ в этих четырёх точках, и в них касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

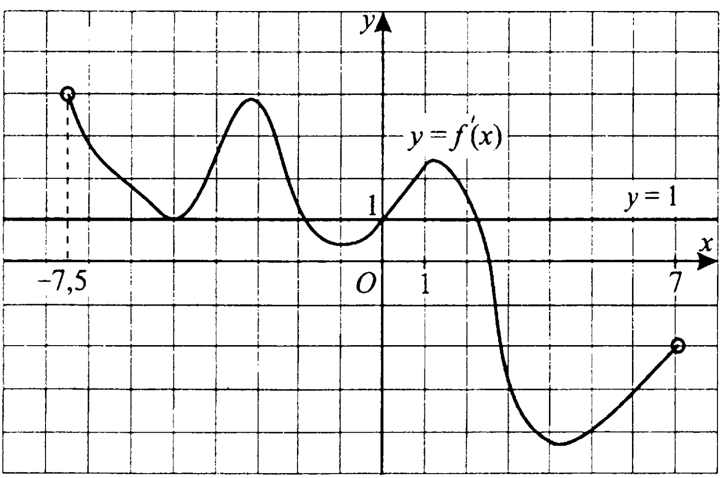


Рис. 430.

410. По графику найдём значение производной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$, которое будет тангенсом искомого угла наклона касательной: $f'(3) = 1 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = 45°$.

415. Значение функции положительно в тех точках, в которых график проходит выше горизонтальной оси абсцисс. Для того чтобы значение производной функции в заданной точке было положительным, достаточно того, чтобы рассматриваемая точка принадлежала интервалу возрастания. Аналогично, значение функции отрицательно в тех точках, в которых график проходит ниже горизонтальной оси абсцисс. Для того чтобы значение производной в заданной точке было отрицательным, достаточно того, чтобы рассматриваемая точка принадлежала интервалу убывания.

Опираясь на вышесказанное, получим, что в точке A значение функции отрицательно и значение производной функции отрицательно (график в этой точке расположен ниже оси абсцисс и точка A принадлежит промежутку убывания). Из тех же соображений заметим, что в точке B значение функции отрицательно, а значение производной функции положительно. Далее, в точке C значение функции положительно и значение производной функции положительно. Наконец, в точке D значение функции положительно, а значение производной функции отрицательно. Остаётся выписать ответ.

419. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. Угловой коэффициент касательной $y = -4x + 15$ равен -4. Получим $y'(x) = -4$, где

$y'(x) = (x^3 + 3x^2 - 4x + 11)' = 3x^2 + 6x - 4.$

$3x^2 + 6x - 4 = -4$; $3x^2 + 6x = 0$; $3x(x + 2) = 0$, следовательно, $x = 0$, либо $x = -2$.

Мы получили два возможных значения для абсциссы точки касания. Выбрать одно из них можно, подставив найденные значения x в формулы функции и касательной. В точке касания значения функции и прямой должны совпасть.

При $x = 0$ $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11 = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 11 = 11$;

$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot 0 + 15 = 15.$

$y(0) = 11$, $y_{\text{кас}}(0) = 15.$

Так как значения функции и касательной при $x = 0$ разные, абсцисса $x = 0$ нам не подходит.

Проверим при $x = -2$:

$y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 11 =$

$-8 + 12 + 8 + 11 = 23;$

$y_{\text{кас}} = -4x + 15 = -4 \cdot (-2) + 15 = 8 + 15 = 23.$

Значения функции и касательной при $x = -2$ равны, значит, абсцисса точки касания $x = -2$.

422. Криволинейная трапеция на рисунке 111 ограничена отрезками прямых $x = -2$ и $x = 1$ и графиком функции $y = f(x)$. Для вычисления площади фигуры используем формулу $S = F(b) - F(a)$, в нашем случае $a = -2$, $b = 1$.

$$S = F(1) - F(-2) = \frac{2 \cdot 1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 -$$

$$- \left(\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} + 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + 2 + 3 - 1 - \left(-\frac{16}{3} + 8 - 6 - 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{16}{3} + 4 - 1 =$$

$$= \frac{18}{3} + 3 = 6 + 3 = 9.$$

426. Найдём разность первообразных, посчитав площадь трапеции $ABCD$ (см. рис. 431)

$$F(3) - F(-1) = S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BA = \frac{3 + 4}{2} \cdot 2 = 7.$$

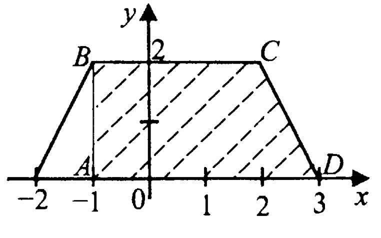


Рис. 431.

430. Найдём производную заданной функции.

$y' = 2(x-2)(2x+3) + (x-2)^2 \cdot 2 = 2(x-2)(2x+3+x-2) = 2(x-2)(3x+1)$.

$y' = 0$ при $x = 2, x = -\frac{1}{3}$ (см. рис. 432).

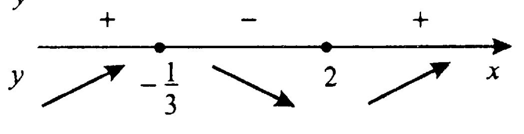


Рис. 432.

Следовательно, единственной точкой минимума является $x = 2$, так как при переходе через неё производная функции меняет знак с «$-$» на «$+$».

435. 1. Найдём производную:
$y'(x) = (3\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}x - 15)' = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} + 0 =$
$= 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}$.

2. Определим знаки производной $y'(x) = 3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}$.
Это выражение неотрицательно при всех значениях x, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$ (всегда выполняется $3\sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2} \geqslant 3\sqrt{2}\cdot(-1) + 3\sqrt{2} = 0$). Следовательно, $y'(x) \geqslant 0$, и функция возрастает при всех значениях x. Наименьшее значение возрастающая функция принимает на левом конце заданного промежутка (при наименьшем возможном значении аргумента $x = 0$).

3. Вычисляем значение функции в точке $x = 0$.
$y = 3\sqrt{2}\sin 0 + 3\sqrt{2}\cdot 0 - 15 = -15$.

436. 1. Найдём производную:

$$y' = (16x - 16\,\mathrm{tg}\,x + 4\pi - 56)' = 16 - \frac{16}{\cos^2 x} - 0 =$$

$$= \frac{16\cos^2 x - 16}{\cos^2 x} = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x}.$$

2. Определим знаки производной:

$$y'(x) = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} \leqslant 0.$$

Это выражение неположительно, так как $\cos x$ принимает значения от -1 до $+1$. Следовательно, $y'(x) \leqslant 0$, и функция убывает при всех допустимых значениях x. Наибольшее значение убывающая функция принимает на левом конце заданного промежутка, то есть при наименьшем возможном значении аргумента $x = -\frac{\pi}{4}$.

Вычисляем значение функции в точке $x = -\frac{\pi}{4}$:

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 16\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 16\,\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\pi - 56 =$$
$$= -4\pi + 16 + 4\pi - 56 = -40.$$

442.

1. Найдём значения функции на концах отрезка:

   $y(-9) = (-9+7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\frac{20}{27}$, так как $e \approx 2{,}7$;

   $y(-7) = (-7+7)e^{-7+8} = 0.$

2. Найдём производную:
   $y' = \left((x+7)e^{x+8}\right)' = (x+7)'e^{x+8} + (x+7)(e^{x+8})' =$
   $= 1e^{x+8} + (x+7)e^{x+8} = (1+x+7)e^{x+8} = (x+8)e^{x+8}.$

3. Найдём значения x, при которых производная функции равна нулю:
   $(x+8)e^{x+8} = 0; \quad x+8=0; \quad x=-8.$

4. Это значение $x=-8$ принадлежит промежутку, данному в задаче: -8 лежит на отрезке $[-9; -7]$.

5. Найдём значение функции в точке, где производная равна нулю:
   $y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1 \cdot 1 = -1.$

6. Выберем из пунктов 1 и 5 наименьшее значение функции. Видим, что из чисел $-\frac{20}{27}$; -1; 0 наименьшим является -1.

450. $y = \log_3(x^2+2x+4)+3.$

$y' = \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+4)\ln 3}$; $y' = 0$ при $x = -1$. Заметим, что $x^2+2x+4 \neq 0$, $x \in R$, так как $D < 0$. При переходе через $x=-1$ производная меняет знак с «$-$» на «$+$» (см. рис. 433). Значит, точка $x=-1$ является точкой минимума.

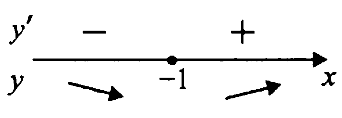


Рис. 433.

Наименьшее значение $y(-1) = 4$.

455. Пусть по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, равную x, тогда рейтинг можно посчитать по формуле $R = \dfrac{7In+Op+3Tr+Q}{A} = \dfrac{7x+x+3x+x}{A} = \dfrac{12x}{A}$. По условию, $R = x$, $\dfrac{12x}{A} = x$, $A = 12$.

458. Составим функцию выручки предприятия, затем неравенство, соответствующее условию задачи.

$$r = q \cdot p = (280 - 10p)p.$$

По условию $r \geqslant 960$, поэтому

$$(280 - 10p)p \geqslant 960.$$

Решим квадратное неравенство:

$$280p - 10p^2 \geqslant 960,$$
$$-10p^2 + 280p - 960 \geqslant 0,$$
$$10p^2 - 280p + 960 \leqslant 0,$$
$$p^2 - 28p + 96 \leqslant 0,$$

$p_1 = 4,\ p_2 = 24 \Rightarrow p \in [4; 24],\ p_{max} = 24$. То есть максимальный уровень цены, при котором выручка предприятия составит не менее 960 тыс. руб., равен 24 тыс. руб.

461. Найдём месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет равна 700 000 руб. в месяц. Если такое значение будет единственным, неравенство составлять и решать не нужно.

Подставим в формулу заданные значения и решим полученное уравнение.

$$\pi = 700\,000, \quad f = 800\,000, \quad v = 300, \quad p = 400,$$
$$\pi = q(p - v) - f,$$
$$700\,000 = q(400 - 300) - 800\,000,$$
$$100q - 800\,000 = 700\,000,$$
$$100q = 1\,500\,000,$$
$$q = 1\,500\,000 : 100,$$
$$q = 15\,000.$$

463. Составим и решим неравенство:

$$\eta \geqslant 75\%,$$
$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% \geqslant 75\%,$$
$$\frac{T_1 - 350}{T_1} \geqslant 0{,}75,$$
$$T_1 - 350 \geqslant 0{,}75T_1,$$
$$T_1 - 0{,}75T_1 \geqslant 350,$$
$$0{,}25T_1 \geqslant 350,$$
$$T_1 \geqslant 1400.$$

Итак, чтобы КПД данного теплового двигателя был не менее 75%, температура нагревателя должна быть не менее 1400 К.

465. В этой задаче главное — понять, что здесь обозначают переменные, входящие в формулу. Общее сопротивление должно быть не меньше 21 Ом, в формуле общее сопротивление обозначается R, $R \geqslant 21$. Приборы, общее сопротивление которых составляет 70 Ом и обозначается R_1, и электрообогреватель с сопротивлением R_2 подключены параллельно. Составим и решим неравенство:

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R,$$

$$\frac{70R_2}{70 + R_2} \geqslant 21,$$

$$70R_2 \geqslant (70 + R_2) \cdot 21,$$
$$70R_2 \geqslant 1470 + 21R_2,$$
$$70R_2 - 21R_2 \geqslant 1470,$$
$$R_2 \geqslant 30.$$

Значит, для нормального функционирования данной электросети наименьшее возможное сопротивление электрообогревателя должно быть не менее 30 Ом.

469. Выразим T^4 из формулы $P = \sigma S T^4$: $T^4 = \dfrac{P}{\sigma S}$.

Подставим заданные значения переменных:

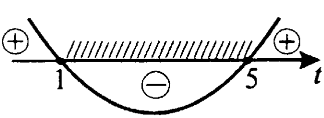
$$T^4 = \frac{19{,}551 \cdot 10^{22}}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 10^{16}} = \frac{19{,}551}{5{,}7} \cdot 7 \cdot 10^{22+8-16} =$$

$$= 3{,}43 \cdot 7 \cdot 10^{14} = 343 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^3 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^4 \cdot 10^{12},$$
$$T = \sqrt[4]{7^4 \cdot 10^{12}} = 7 \cdot 10^3 = 7000.$$

Следовательно, температура данной звезды составляет 7000 K.

471. Составим и решим неравенство:

$$h(t) \geqslant 25,$$
$$-5t^2 + 30t \geqslant 25,$$
$$t^2 - 6t \leqslant -5,$$
$$t^2 - 6t + 5 \leqslant 0,$$
$$t_1 = 1, t_2 = 5.$$
$$t \in [1; 5],$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4.$$



Итак, на высоте не менее 25 м мяч находился в течение 4 секунд.

473. Составим выражение для определения разности высот и вычислим эту величину.

$h_1 = 4{,}9t_1^2$, $h_2 = 4{,}9t_2^2$,

$$\Delta h = h_2 - h_1 = 4{,}9(t_2^2 - t_1^2) = 4{,}9(5{,}5^2 - 4{,}5^2) =$$
$$= 4{,}9(5{,}5 - 4{,}5)(5{,}5 + 4{,}5) = 49.$$

То есть второе сооружение выше первого на 49 м.

475. Длина зазора станет равной нулю, если рельс станет длиннее на величину исходного зазора:

$$l(t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$l_0(1 + \alpha t^\circ) - l_0 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20(1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ) - 20 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20 + 20 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ - 20 = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$20 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} t^\circ = 6 \cdot 10^{-3},$$
$$t^\circ = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = 25.$$

477. Зависимость температуры нагревательного элемента от времени имеет вид квадратичной функции. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, так как коэффициент при t^2 отрицателен ($b = -0{,}25 < 0$). График процесса изменения температуры показан на рисунке 434.

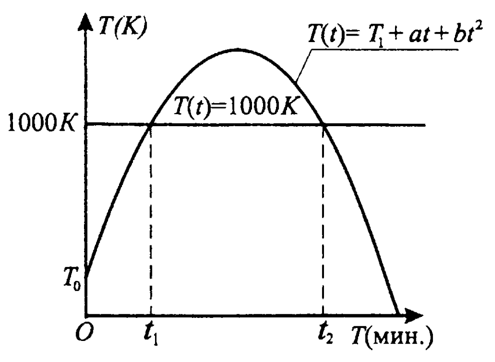


Рис. 434.

Таким образом, температура 1000 К достигается дважды: первый раз на промежутке возрастания, второй — на промежутке убывания. Но реально до второго раза температура просто не дойдёт, так как прибор уже в момент времени t_1 выйдет из строя. Значит, наша цель — определить меньший корень квадратного уравнения:

$$100 + 37{,}5t - 0{,}25t^2 = 1000,$$
$$0{,}25t^2 - 37{,}5t + 900 = 0, \qquad \Big|\times 4$$
$$t^2 - 150t + 3600 = 0,$$
$$t_1 = 30, \quad t_2 = 120.$$

Следовательно, чтобы прибор не вышел из строя, его нужно выключить не позже чем через 30 минут после начала работы.

478. Приведём данные к требуемым единицам измерения: $90\,\text{см} = 0{,}9\,\text{м}$.

Составим неравенство по условию задачи и решим его относительно скорости.

$$P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) > 0,$$

$$\frac{v^2}{L} - g > 0,$$

$$v^2 > gL, \quad v > 0,$$
$$v > \sqrt{gL} = \sqrt{10 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3.$$

Итак, скорость вращения ведёрка должна быть не менее 3 м/с.

481. $F_A \leqslant 1\,130\,400,$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \leqslant 1\,130\,400,$$

$$R^3 \leqslant \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{\pi \rho g \cdot 4},$$

$$R^3 \leqslant \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{3{,}14 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 4} = 27,$$
$$R \leqslant 3.$$

Следовательно, радиус батискафа не должен превышать 3 м.

483. Время полёта $t \geqslant 5c$, значит, $\dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} \geqslant 5$. $\sin\alpha \geqslant \dfrac{5g}{2v_0}$, $\sin\alpha \geqslant \dfrac{5 \cdot 1{,}6}{2 \cdot 8}$, $\sin\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$. Наименьший острый угол $\alpha = 30^\circ$.

486. Из условия следует, что $E = \dfrac{0{,}16 \cdot 4\cos^2 \pi t}{2}$, $E = 0{,}32\cos^2 \pi t$. Пусть $t \in [0; 1]$. Найдём, при каких t выполняется $E \geqslant 0{,}24$, то есть $0{,}32\cos^2 \pi t \geqslant 0{,}24$; $\cos^2 \pi t \geqslant \dfrac{3}{4}$; $\cos \pi t \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos \pi t \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что $t \in [0; 1]$, получим $\pi t \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$ или $\pi t \in \left[\dfrac{5\pi}{6}; \pi\right]$, откуда $t \in \left[0; \dfrac{1}{6}\right]$ или $t \in \left[\dfrac{5}{6}; 1\right]$. Таким образом, $E \geqslant 0{,}24$ на протяжении $\dfrac{1}{6}$ секунды в начале 1-й секунды и $\frac{1}{6}$ в конце. И тогда $E \geqslant 0{,}24$ на протяжении $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ секунды, $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

491. Запишем формулу работы $A = \alpha v T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ и подставим данные из условия $v = 40$ молей, $p_1 = 1{,}3$ атм., $\alpha = 3{,}5$, $T = 300$ К. Получим $3{,}5 \cdot 40 \cdot 300 \log_2 \frac{p_2}{1{,}3} \leqslant 126\,000$, $\log_2 \frac{p_2}{1{,}3} \leqslant \frac{126\,000}{3{,}5 \cdot 40 \cdot 300}$, $\log_2 \frac{p_2}{1{,}3} \leqslant 3$,

$\frac{p_2}{1{,}3} \leqslant 2^3$, $\frac{p_2}{1{,}3} \leqslant 8$, $p_2 \leqslant 10{,}4$.

Наибольшее давление при данных условиях равно 10,4 атм.

494. Чтобы ответить на вопрос, с какой высоты горизонт виден на расстоянии 16 километров, подставим в формулу $l = \sqrt{2Rh}$ известные величины и решим уравнение:

$$\sqrt{2 \cdot 6400 \cdot h} = 16,$$
$$80\sqrt{2 \cdot h} = 16,$$
$$\sqrt{2 \cdot h} = \frac{16}{80}, \quad \sqrt{2 \cdot h} = \frac{1}{5}, \quad 2 \cdot h = \frac{1}{25},$$
$$h = \frac{1}{50} = 0{,}02, \quad h = 0{,}02 \text{ км}.$$

496. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. В данном треугольнике катеты равны 2 см и 6 см (посчитаем по клеточкам), поэтому площадь $S = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ (см^2).

497. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Найдём длину катета BA. Абсциссы (x) у них равны. Находим разность ординат (y), длина AB равна $10 - 2 = 8$. Длину отрезка BC, параллельного оси Ox, можно найти, если вычесть их абсциссы: $6 - 4 = 2$. Тогда площадь $S = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$ (см^2).

498. Проведём высоту h. Треугольник тупоугольный, поэтому высота проводится вне треугольника.

На рисунке 435 сторона $a = 2$ см, высота $h = 3$ см.

$S = \frac{ah}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ см^2.

502. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон a и b. Для того чтобы найти стороны прямоугольника, рассмотрим прямо-

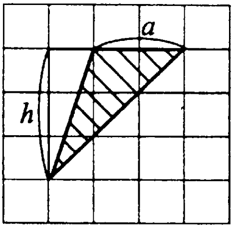


Рис. 435.

угольный треугольник ABC с катетами $AB = 2$ и $BC = 1$ и гипотенузой $AC = b$ (см. рис. 436).

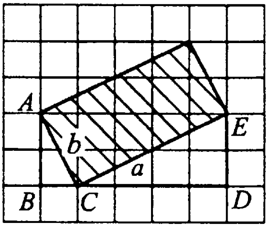


Рис. 436.

По теореме Пифагора гипотенуза $b = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Из треугольника CDE с катетами $CD = 4$ и $DE = 2$ найдём гипотенузу CE. $a = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$. Следовательно, площадь прямоугольника $S = \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = 10$.

507. Площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований на высоту. Обозначим трапецию $ABCD$. Проведём из точки D высоту DM к основанию AB. По рисунку 437 видно, что высота равна 2 см, основания $AB = 4$ см, $DC = 2$ см.

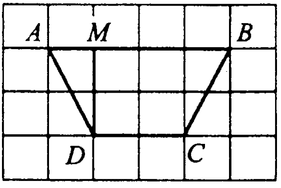


Рис. 437.

Площадь трапеции $S = \dfrac{(2+4) \cdot 2}{2} = 6$ (см^2).

511. Диагонали находим как гипотенузы прямоугольных треугольников ACB и MPK по теореме Пифагора (см. рис. 438).

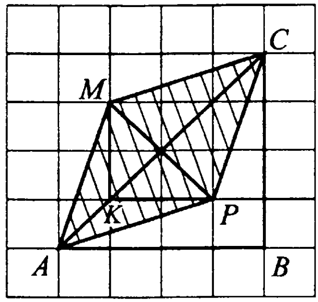


Рис. 438.

Диагональ $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$, $MP = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Площадь ромба $S = \dfrac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{2} = 8$.

515. Достроим четырёхугольник до прямоугольника (см. рис. 439).

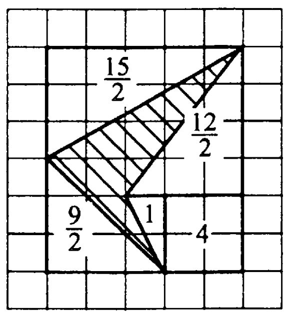


Рис. 439.

Чтобы найти площадь четырёхугольника, нужно из площади прямоугольника со сторонами 5 и 6 вычесть площади четырёх прямоугольных треугольников и квадрата. Попробуйте посчитать площади прямоугольных треугольников самостоятельно, величины этих площадей указаны на рисунке.

Получаем площадь заданного четырёхугольника:
$S = 30 - 7{,}5 - 6 - 1 - 4{,}5 - 4 = 7$.

520. Площадь круга равна произведению числа π на квадрат радиуса. Найдём радиус. Из центра O проведём радиус OA. В треугольнике OAB сторона OA — гипотенуза, катеты равны 1 и 2 (см. рис. 440).

Найдём гипотенузу по теореме Пифагора.

$OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Площадь круга $S = \pi\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5\pi$. $\dfrac{S}{\pi} = \dfrac{5\pi}{\pi} = 5$.

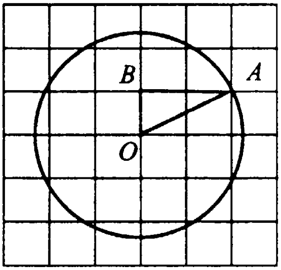


Рис. 440.

523. Посчитаем, какая часть круга закрашена. Проведя дополнительные линии (см. рис. 441), видим, что сектор на рисунке C составляет $\frac{1}{8}$ часть круга, а сектор на рисунке D составляет $\frac{5}{8}$ частей круга (круг разделён на 8 равных частей, и закрашено 5 таких частей).

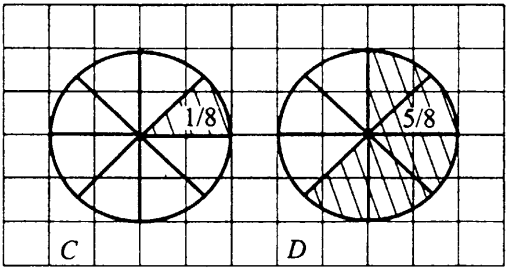


Рис. 441.

Находим площади секторов на рисунках C и D.

Поделим площадь круга на 8, получим площадь сектора на рисунке C, потом умножим эту площадь на 5, получим площадь сектора на рисунке D.

$S_C = 4\pi : 8 = 0{,}5\pi$; $\frac{S}{\pi} = 0{,}5$; $S_D = 4\pi : 8 \cdot 5 = 2{,}5\pi$; $\frac{S}{\pi} = 2{,}5$.

526. $\triangle MKB = \triangle MBE$ по первому признаку ($KM = ME$ по условию, MB — общая сторона. $\angle KMB = \angle BME$, так как MB — биссектриса), $\angle BEM = \angle K = 95°$.

Внешний угол $\triangle BEP$ равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, то есть $\angle BEM = \angle P + \angle PBE$.

$\angle PBE = 95° - 35° = 60°$.

528. Сумма углов треугольника равна 180°, а четырёхугольника — 360°.

В $\triangle ACE$ $\angle 5 = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 180° - 52° - 26° = 102°$ (см. рис. 442).

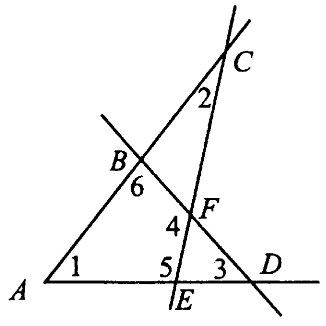


Рис. 442.

В $\triangle ABD$ $\angle 6 = 180° - \angle 1 - \angle 3 = 180° - 52° - 48° = 80°$.
В четырёхугольнике $ABFE$ $\angle 1 + \angle 6 + \angle 4 + \angle 5 = 360°$,
$\angle 4 = 360° - 52° - 80° - 102° = 126°$.

533. Сумма углов, не смежных с данным внешним углом, равна величине этого внешнего угла, то есть $\angle A + \angle C = 85°$.

Обозначим $\angle A = 2x$, $\angle C = 3x$.

$2x + 3x = 85$, $5x = 85$, $x = 17$.

$\angle C = 3x = 3 \cdot 17 = 51°$ — наибольший из углов A и C.

535. Сумма углов треугольника равна 180°,
$\angle A + \angle D + \angle ACD = 180°$, $\angle D = 180° - 48° - 102° = 30°$.
$\triangle DBC$ — равнобедренный ($BC = BD$) $\Rightarrow$ углы при основании равны, $\angle BCD = \angle D = 30°$.

539. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 39°$, $\angle B = 51°$.

CD — биссектриса, $\angle ACD = \angle DCB = 45°$.

CH — высота, $\angle AHC = 90°$. Нужно найти $\angle DCH$, он равен разности $\angle ACH - \angle ACD$.

Найдём $\angle ACH$ из $\triangle ACH$.

$\angle ACH = 180° - 90° - 39° = 51°$. $\angle DCH = 51° - 45° = 6°$.

541. Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции, и её концы являются серединами боковых сторон. $DC \parallel AB \parallel EF$, $ED = EA$, $BF = CF$. Параллельные прямые DC, EF и AB проходят через концы равных отрезков на одной прямой (AD), значит, и на прямой DB они отсекают равные отрезки (по теореме Фалеса). $BK = DK \Rightarrow EK$ и KF — средние линии $\triangle ADB$ и $\triangle DCB$. Средняя линия треугольника равна половине параллельной ей стороны, $EK = AB : 2 = 14 : 2 = 7$; $KF = DC : 2 = 10 : 2 = 5$. Больший из отрезков равен 7.

543. В параллелограмме $ABCD$ пронумеруем образовавшиеся углы (см. рис. 443). По условию BE и CE — биссектрисы углов B и $C \Rightarrow$

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 5$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BE $\Rightarrow \angle 1 = \angle 5 \Rightarrow AE = AB$.

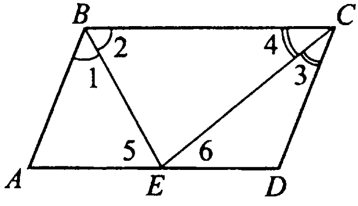


Рис. 443.

$\angle 3 = \angle 4$, $\angle 4 = \angle 6$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей CE $\Rightarrow \angle 3 = \angle 6 \Rightarrow DC = DE$.

$AB = DC$ как противоположные стороны параллелограмма $\Rightarrow$

$AB = AE = DC = DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$.

547. Угол между касательной и радиусом, проведённым в точку касания, прямой: $\angle OAC = 90°$. Центральный угол DOA равен угловой величине дуги, на которую он опирается, то есть $\angle DOA = \smile DA = 128°$. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним, $\angle DOA = \angle OAC + \angle ACO$, $\angle ACO = 128° - 90° = 38°$.

548. Угол между хордой и касательной к окружности, проведённой из конца хорды, равен половине угловой величины дуги, которую стягивает эта хорда. $\angle CBA = 0{,}5\smile AB = 0{,}5 \cdot 104° = 52°$.

551. Диаметр DC опирается на полуокружность $\smile DC = 180°$. $\smile AC = \smile DC - \smile DA = 180° - \angle DOA = 180° - 108° = 72°$. Вписанный угол ABC равен половине угловой величины дуги, на которую опирается. $\angle ABC = 0{,}5\smile AC = 0{,}5 \cdot 72° = 36°$.

552. Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается. $\angle BMA = 0{,}5\smile AB = 0{,}5 \cdot 106° = 53°$. $\angle MAK = 0{,}5\smile MK = 0{,}5 \cdot 42° = 21°$. $\angle BMA$ — внешний к углу M $\triangle AMC$, значит, $\angle BMA$ равен сумме $\angle MCA$ и $\angle MAC$ этого треугольника.

$\angle C = \angle BMA - \angle MAC = 53° - 21° = 32°$.

555. Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, поэтому сумма его противоположных углов равна $180°$.

По условию $\angle A : \angle B : \angle D = 5 : 2 : 6$.

Обозначим $\angle A = 5x$, $\angle B = 2x$, $\angle D = 6x$.

$\angle B + \angle D = 180°$, $8x = 180°$, $x = 22{,}5°$.

$\angle C = 180° - \angle A = 180° - 5x = 180° - 112{,}5° = 67{,}5°$.

556. $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC$. $\angle DAC = \angle DBC = 52°$ (как вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу). $\angle ABD = 113° - 52° = 61°$.

559. В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности O лежит на высоте, проведённой к основанию, т.е. $O \in CH$ (см. рис. 444). O — точка пересечения биссектрис. $OH = r$. AO — биссектриса, она делит сторону CH треугольника ACH на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, $\dfrac{AH}{HO} = \dfrac{AC}{CO}$. CH — медиана, как высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника ABC, $AH = 30 : 2 = 15$. Из $\triangle ACH$ по теореме Пифагора $CH = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$. $\dfrac{15}{r} = \dfrac{25}{20 - r}$, $25r = 15(20 - r)$, $40r = 15 \cdot 20$, $r = 7{,}5$.

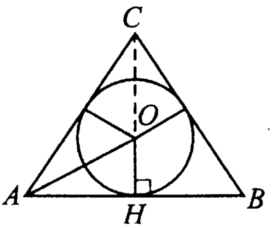


Рис. 444.

563. У четырёхугольника, описанного около окружности, суммы длин противоположных сторон равны, то есть $BC + AD = DC + AB$. Поэтому $AD + CB = \dfrac{P}{2} = 42 : 2 = 21$. Наибольшая боковая сторона $CB = 12$ $\Rightarrow AD = 21 - 12 = 9$. Так как $AD \perp AB$, то $MK = AD = 2R$, где R — радиус вписанной окружности. Тогда $R = 9 : 2 = 4{,}5$.

567. Пусть после сторон с длинами 15 и 21 находятся последовательно стороны с длинами x и y. Тогда $x + 15 = y + 21$, так как у описанного около окружности четырёхугольника суммы противоположных сторон равны. Кроме того, сумма длин всех сторон равна периметру: $15+21+x+y = 132$. Объединим полученные уравнения в систему и решим её:

$$\begin{cases} x + 15 = y + 21, \\ 15 + 21 + x + y = 132; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 6, \\ x + y = 96; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 102, \\ 2y = 90; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 51, \\ y = 45. \end{cases}$$

Длина большей стороны равна 51.

569. $ABCD$ — прямоугольник, $AC = BD$, $OC = OD$ (см. рис. 445). $\angle ABC = 90°$, значит, AC — диаметр.

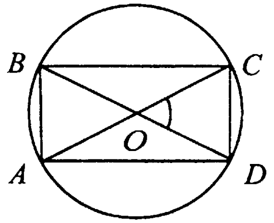


Рис. 445.

В равнобедренном $\triangle COD$ $\angle COD = 60°$, значит, $\triangle COD$ — равносторонний, $OC = CD = 12$.

571. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы. Отсюда гипотенуза данного треугольника равна $2 \cdot 9 = 18$.

572. Если в одном сантиметре заключено 0,5 км, то в 6 см, соответственно, заключено в 6 раз больше, то есть $6 \cdot 0{,}5 = 3$ (км).

574. Участок имеет прямоугольную форму, его общая площадь (вместе с домом) равна произведению сторон $30 \cdot 60 = 1800$ м^2. Площадь дома, аналогично, равна $4 \cdot 6 = 24$ (м^2).

Значит, искомая площадь равна $1800 - 24 = 1776$ (м^2).

581. Рассмотрим рис. 446. В $\triangle ABC$ $\angle A = 90°$, $AC = 12$ м, $BC = 13$ м. По теореме Пифагора имеем $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Отсюда $AB^2 = BC^2 - AC^2$, $AB^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, $AB = 5$ м.

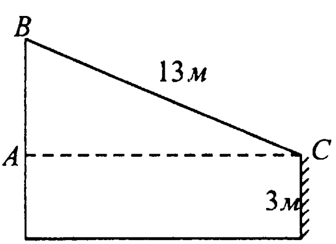


Рис. 446.

Учитывая, что высота палатки 3 м, найдём высоту столба:
$5\text{ м} + 3\text{ м} = 8\text{ м}$.

585. Рассмотрим рисунок 447. $\triangle ACD \sim \triangle ABE$, $\frac{CD}{BE} = \frac{AD}{AE}$;

$AD = AE + ED = 20 + 20 = 40$; $\frac{CD}{1{,}8} = \frac{40}{20}$; $\frac{CD}{1{,}8} = 2$; $CD = 3{,}6$ м.

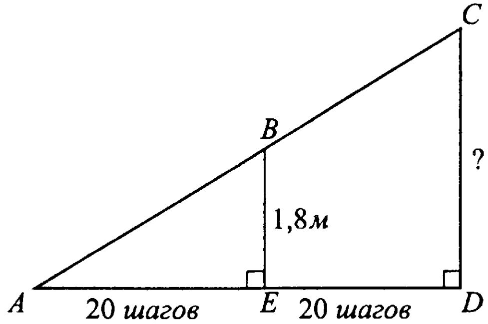


Рис. 447.

588. Синусом угла называют отношение противолежащего катета к гипотенузе. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$ найдём противолежащий углу A катет BC (см. рис. 448).

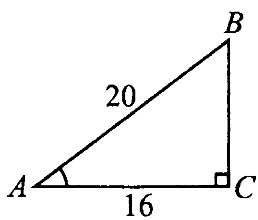


Рис. 448.

$BC^2 = AB^2 - AC^2$, $BC^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144$, $BC = \sqrt{144} = 12$.

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{20} = 0{,}6$.

593. Так как угол A острый, то
$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - 0{,}28^2} = \sqrt{0{,}9216} = 0{,}96$.

597. Достроим угол до прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 449).

Тангенсом угла называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

$\operatorname{tg} BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$. Значение тангенса, умноженное на 3, равно 4.

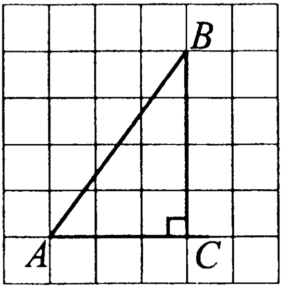


Рис. 449.

599. Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHB с прямым углом H и катетами BH и HC (см. рис. 450). Найдём в нём катет BH.

$BH^2 = BC^2 - HC^2$,

$BH^2 = 15^2 - \left(2\sqrt{54}\right)^2 = 225 - 216 = 9$,

$BH = \sqrt{9} = 3$.

$\cos B = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{3}{15} = 0{,}2.$

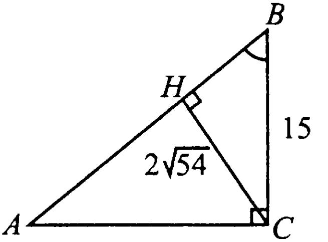


Рис. 450.

600. В треугольнике ABC стороны $AC = BC$, значит, он равнобедренный. Высота CH, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, делит AB пополам, поэтому $AH = HB = 24 : 2 = 12$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHA с прямым углом H и катетами AH и HC. $AH = 12$, $\cos A = 0{,}6$. Найдём AC. Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$$\cos A = \frac{AH}{AC} = \frac{12}{AC} = 0{,}6.$$

$AC = 12 : 0{,}6 = 20$.

По теореме Пифагора $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$.

605. В равнобедренном треугольнике ABC высота CH является медианой, значит, $AH = HB$ (см. рис. 451). Рассмотрим прямоугольный треугольник BCH с гипотенузой $BC = 15$ и катетами CH и HB. В данном треугольнике $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{CH}{CB}$; $\frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{CH}{15}$, тогда $CH = \sqrt{21} \cdot 15 : 5 = 3\sqrt{21}$. Катет HB можно найти по теореме Пифагора: $HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{225 - (3\sqrt{21})^2} = \sqrt{225 - 189} = \sqrt{36} = 6$.

AB в два раза больше HB, $AB = 6 \cdot 2 = 12$.

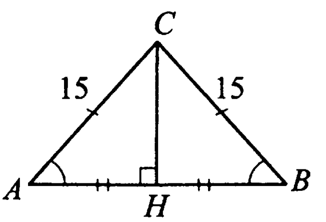


Рис. 451.

607. Проведём высоту CH, тогда $AH = BH = 3\sqrt{39}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH (см. рис. 452). Катет HC можно найти по теореме Пифагора.

$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - (3\sqrt{39})^2} = \sqrt{400 - 351} = \sqrt{49} = 7$,

$\sin A = \frac{CH}{CA} = \frac{7}{20} = 0{,}35$

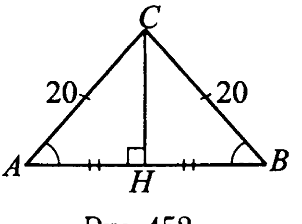


Рис. 452.

610. Внешним углом треугольника называют угол, образованный стороной этого треугольника и продолжением другой его стороны. На рисунке 453 внешний угол при вершине A — это угол BAK.

BAK и CAB — смежные углы. Тангенсы смежных углов — противоположные числа (отличаются только знаком), поэтому найдём тангенс угла CAB. Тангенсом угла называют отношение проти-

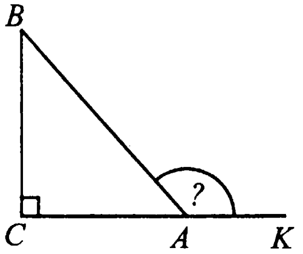


Рис. 453.

волежащего катета к прилежащему. Для нашего треугольника $\cos A = \frac{10}{\sqrt{109}} = \frac{AC}{BA}$. Будем считать, что $AC = 10$, $BA = \sqrt{109}$. Найдём $BC = \sqrt{BA^2 - CA^2} = \sqrt{109 - 100} = \sqrt{9} = 3$. Тогда $\operatorname{tg} BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{10} = 0{,}3$. $\operatorname{tg} BAK = -0{,}3$.

615. Точке A симметрична точка $B(-2;\ 5)$ (см. рис. 454). Абсцисса точки B равна -2.

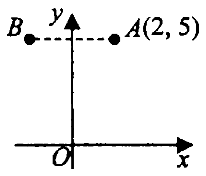


Рис. 454.

617. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Абсцисса точки P равна $\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+6}{2} = 2{,}5$.

619. Ордината — это координата по оси Oy. Она равна длине отрезка HM (см. рис. 455). $HB = 2$, так как ордината B равна 2. Поскольку противоположные стороны параллелограмма равны, то $OC = BM = 8$. Тогда $HM = 2 + 8 = 10$.

621. $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{PN}$, $|\overrightarrow{PN}| = 10$.

624. Найдём координаты вектора $\vec{a}$. Он выходит из начала координат, поэтому его координаты равны координатам его конца: $\vec{a}\{2;\ 3\}$. Аналогично $\vec{b}\{6;\ 4\}$.

$\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{2-6;\ 3-4\}$, то есть $\{-4;\ -1\}$. Сумма координат $-4 + (-1) = -5$.

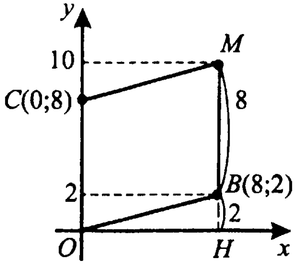


Рис. 455.

626. Скалярное произведение векторов вычисляют по формуле $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{KM} = |\overrightarrow{KN}| \cdot |\overrightarrow{KM}| \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами. В правильном $\triangle MKN$ углы равны по $60°$, поэтому $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{KM} = 10 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 100 \cdot 0{,}5 = 50$.

629. Данный многогранник составлен из двух прямоугольных параллелепипедов (см. рис. 456). Измерения большого параллелепипеда равны 16, 6 и 7. Измерения малого параллелепипеда равны $16-10 = 6$, 6 и $10-7 = 3$.

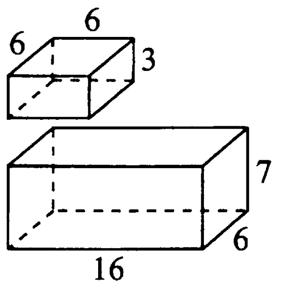


Рис. 456.

Суммарный объём этих параллелепипедов равен
$16 \cdot 6 \cdot 7 + 6 \cdot 6 \cdot 3 = 96 \cdot 7 + 36 \cdot 3 = 672 + 108 = 780$.

634. Проведём плоскость $F_1F_2K_2$ и отбросим ту часть фигуры, которая оказалась справа. Достроим оставшуюся часть многогранника до прямоугольного параллелепипеда $AFKDA_2F_2K_2D_2$ (см. рис. 457). Квадрат диагонали AK_2 найдём по формуле
$AK_2^2 = FA^2 + DA^2 + AA_2^2 = 4^2 + 3^2 + 6^2 = 16 + 9 + 36 = 61$.

637. Заметим, что угол $F_2AB = \alpha$ лежит в плоскости грани $AA_1E_1E_2F_2F_1B_1B$ многогранника (см. рис. 458). Все углы многогранника прямые, поэтому $F_2F_1 \perp AB$. В прямоугольном $\triangle AF_2F$ $\angle F = 90°$; $\operatorname{tg}\alpha = F_2F : AF = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$.

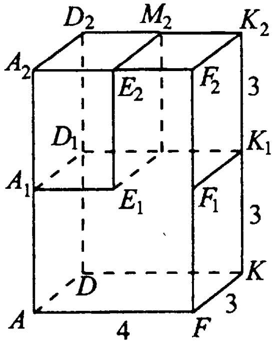


Рис. 457.

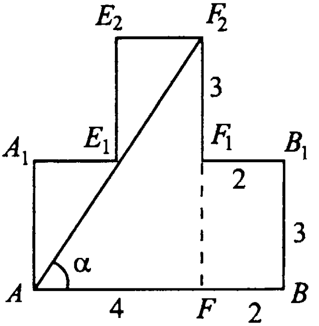


Рис. 458.

640. Данный многогранник составлен из куба с ребром 2 и параллелепипеда $5 \times 4 \times 4$. Площадь поверхности куба равна $6 \cdot 2^2 = 24$. Учтём, что нижняя грань куба «склеена» с параллелепипедом, поэтому её площадь не включается в площадь исходного многогранника. Остаётся $24 - 2 \cdot 2 = 20$.

Площадь поверхности параллелепипеда равна $2(5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 4) = 2 \cdot 56 = 112$. Также следует учесть, что квадрат 2×2 верхней грани параллелепипеда не будет включён в конечную площадь. Остаётся $112 - 2 \cdot 2 = 108$.

Искомая площадь равна $20 + 108 = 128$.

641. При решении этой задачи данный многогранник удобнее всего рассматривать как прямую призму с высотой $h = 7$. Основанием этой призмы является многоугольник (см. рис. 459) с периметром $P = 2 \cdot (5 + 4) = 18$ и площадью $S_{осн.} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 17$.

Тогда площадь боковой поверхности призмы равна $S_{бок.} = Ph = 18 \cdot 7 = 126$, а площадь всей поверхности равна $S = S_{бок.} + 2S_{осн.} = 126 + 2 \cdot 17 = 160$.

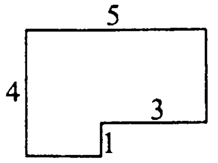


Рис. 459.

645. Нам известны два измерения прямоугольного параллелепипеда (2 и 5), нужно найти третье измерение. Обозначим его через x. Тогда площадь поверхности параллелепипеда равна $S = 2(2 \cdot 5 + 2x + 5x)$. По условию $S = 62$, поэтому $2(2 \cdot 5 + 2x + 5x) = 62$; $7x + 10 = 31$; $x = 3$. Искомое ребро равно 3.

648. Если обозначить неизвестное ребро через a, то объём равен $V = 2 \cdot 6 \cdot a$. По условию $V = 36$, поэтому $2 \cdot 6 \cdot a = 36$; $a = 3$. Найдём диагональ d данного прямоугольного параллелепипеда.
$d^2 = 2^2 + 6^2 + 3^2$; $d^2 = 4 + 36 + 9$; $d^2 = 49$; $d = 7$.

652. Обозначим ребро куба через a. Тогда площадь поверхности исходного куба равна $6a^2$, а площадь поверхности увеличенного куба $6(a+1)^2$. По условию $6(a+1)^2 - 6a^2 = 90$; $12a + 6 = 90$; $12a = 84$; $a = 7$.

654. Обозначим через S площадь основания призмы. Тогда из формулы объёма призмы $V = Sh$ имеем $12S = 600$, $S = 50$ (см^2). После погружения детали суммарный объём детали и воды вычисляется по той же формуле: $50 \cdot 16 = 800$ (см^3). Объём детали равен $800 - 600 = 200$ (см^3).

657. Обозначим через V_1 и S_1 объём и площадь основания исходной призмы, через V_2 и S_2 объём и площадь основания отсечённой призмы. Так как у обеих призм общая высота, то $\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1}$. Средняя линия отсекает от треугольника в основании исходной призмы подобный треугольник, коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$ (так как средняя линия в 2 раза меньше параллельной ей стороны треугольника). Отсюда $\frac{S_2}{S_1} = k^2 = \frac{1}{4}$; $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{4}$;
$V_2 = \frac{1}{4}V_1 = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

659. По теореме Пифагора можно найти гипотенузу c треугольника в основании призмы. $c^2 = 5^2 + 12^2$; $c^2 = 169$; $c = 13$. Периметр основания призмы равен $P = 5 + 12 + 13 = 30$. Площадь прямоугольного треугольника в основании равна половине произведения его катетов: $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Площадь боковой поверхности равна $S_{\text{бок.}} = Ph = 30h$. В условии дана площадь всей поверхности призмы $S_{\text{полн.}} = 180$. Отсюда $S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = 180$; $30h + 2 \cdot 30 = 180$; $30h = 120$; $h = 4$.

664. В правильной шестиугольной призме (см. рис. 460) в основании лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$, в котором $\angle EDC = 120°$.
В $\triangle EDC$ $EC^2 = ED^2 + DC^2 - 2 \cdot ED \cdot DC \cdot \cos \angle D$.

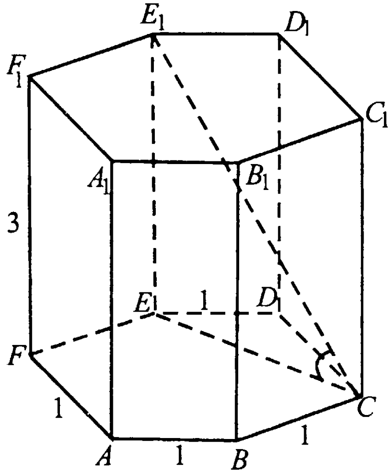


Рис. 460.

$EC^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \angle 120°$,

$EC^2 = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3$, $EC = \sqrt{3}$.

В $\triangle E_1EC$ $\angle E_1EC = 90°$, $EC = \sqrt{3}$, $EE_1 = 3$,

$\operatorname{tg} \angle CE_1E = \frac{EC}{EE_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\angle CE_1E = 30°$.

667. Проведём апофему EH (см. рис. 461). EH — высота равнобедренного треугольника ABE, поэтому является его медианой,
и $AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AEH имеем $EH^2 = AE^2 - AH^2$; $EH^2 = 17^2 - 8^2 = 225$; $EH = 15$. В основании пирамиды лежит квадрат с периметром $4 \cdot 16 = 64$ и площадью $16^2 = 256$. Искомая площадь равна сумме площади основания и площади боковой поверхности:

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{осн.}} + \frac{1}{2}Pl = 256 + \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 15 = 256 + 480 = 736.$

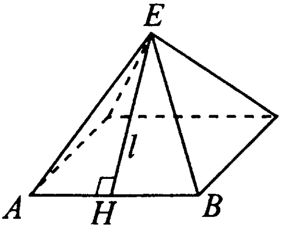


Рис. 461.

669. По условию высота пирамиды $EH = 12$. Из прямоугольного треугольника EHG имеем $\operatorname{ctg} \angle EGH = \frac{HG}{EH}$; $HG = EH \operatorname{ctg} 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$. Аналогично из прямоугольного треугольника EHA получаем $HA = 4\sqrt{3}$. Площадь прямоугольника в основании $S_{\text{осн.}} = AB \cdot AD = HG \cdot (2 \cdot HA) = 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96$. Объём пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot 12 = 384$.

673. Опустим из вершины G перпендикуляр GH на плоскость основания пирамиды. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник, и точка H — его центр. В правильном шестиугольнике радиус описанной окружности равен стороне шестиугольника, поэтому отрезки AH, BH, ..., FH разбивают шестиугольник на шесть равносторонних треугольников (см. рис. 462). Площадь каждого треугольника равна $4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$, поэтому площадь шестиугольника равна $24\sqrt{3}$.

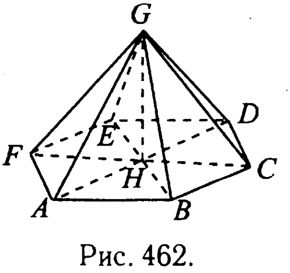


Рис. 462.

Теперь найдём высоту пирамиды. По теореме Пифагора для треугольника AHG имеем $HG^2 = AG^2 - AH^2$; $HG^2 = 8^2 - 4^2$; $HG^2 = 48$; $HG = 4\sqrt{3}$.

Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 96$.

677. Объём воды после переливания остаётся тем же: $V_1 = V_2$; $\pi r_1^2 \cdot 45 = \pi r_2^2 \cdot h_2$. Так как диаметр второго сосуда в 3 раза больше диаметра первого, то и радиус второго втрое больше радиуса первого:
$45r_1^2 = (3r_1)^2 \cdot h_2$; $45r_1^2 = 9r_1^2 \cdot h_2$; $h_2 = 5$.

680. Осевое сечение — это прямоугольник со сторонами $2r$ и h, где r — радиус основания, h — высота цилиндра. Площадь этого прямоугольника равна $2rh$. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{\text{бок.}} = 2\pi rh$. Отсюда $\frac{S_{\text{бок.}}}{\pi} = 2rh = 6$.

684. По условию $h = l\sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ (см. рис. 463);

$r = l\cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$. Искомый объём равен

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (5\sqrt{3})^2 \cdot 5 = 125\pi$; $\frac{V}{\pi} = 125$.

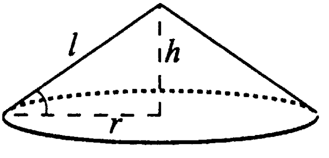


Рис. 463.

689. Обозначим через r радиус основания конуса, через l образующую. Тогда по условию $2\pi r = 4$; $\pi r = 2$.
$S_{\text{бок.}} = \pi rl = 2 \cdot 5 = 10$.

692. Угол 60°, вырезанный из основания, составляет $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ часть полного угла. Таким образом, $\frac{1}{6}$ часть конуса была удалена, $\frac{5}{6}$ осталось. Объём конуса с радиусом основания 15 и высотой 18 равен

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 18 = 225 \cdot 6\pi = 1350\pi$. Искомый объём $V = \frac{5}{6} \cdot 1350\pi = 1125\pi$;

$\frac{V}{\pi} = 1125$.

694. Обозначим через r радиус шара. Тогда $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\,000\pi$; $r^3 = 27\,000$; $r = 30$. Площадь поверхности шара равна $S = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 30^2 = 3600\pi$; $\frac{S}{\pi} = 3600$.

697. Обозначим радиус шара через r. Тогда площадь большого круга шара равна πr^2, а площадь поверхности шара — $4\pi r^2$. Таким образом, площадь поверхности шара в 4 раза больше площади большого круга шара и равна $4 \cdot 10 = 40$.

699. Объём куба прямо пропорционален третьей степени его ребра, поэтому объём увеличится в $4^3 = 64$ раза.

700. Объём конуса прямо пропорционален площади основания. Площадь основания равна πr^2, то есть прямо пропорциональна квадрату радиуса. Таким образом, при увеличении радиуса основания в 2,5 раза объём увеличится в $2{,}5^2 = 6{,}25$ раз.

702. При увеличении всех линейных размеров тетраэдра в 3 раза его площадь поверхности увеличится в $3^2 = 9$ раз.

706. Объём конуса равен $\frac{1}{3}Sh$, а объём цилиндра — Sh, где S — площадь их общего основания, h — общая высота. Видно, что объём цилиндра в 3 раза больше объёма конуса и равен $16 \cdot 3 = 48$.

709. Каждая сторона прямоугольника в основании параллелепипеда равна диаметру цилиндра, то есть $2 \cdot 5 = 10$. Площадь основания параллелепипеда равна $10 \cdot 10 = 100$. Высоту h параллелепипеда находим из формулы объёма параллелепипеда: $100h = 600$; $h = 6$. Найденная высота параллелепипеда одновременно является и высотой цилиндра.

713. Рассмотрим куб как четырёхугольную призму. Его объём равен $V_{\text{куб}} = S_{\text{осн.}} h_{\text{куб}}$. Основание пирамиды совпадает с основанием призмы, а высота вдвое меньше высоты призмы. Поэтому

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot \frac{1}{2}h_{\text{куб}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{\text{куб}} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5.$

716. Обозначим сторону шестиугольника в основании пирамиды через r. Правильный шестиугольник можно разбить на 6 правильных треугольников (как в задаче 12), поэтому площадь шестиугольника равна $6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

Найдём площадь треугольника ABC.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{1}{6}S_{ABCDEF}$.

Таким образом, площадь основания пирамиды $GABC$ в 6 раз меньше площади основания шестиугольной пирамиды, а их высóты совпадают. Поэтому объёмы этих пирамид находятся в том же соотношении, что и площади их оснований. $V_{GABC} = \frac{1}{6}V_{GABCDEF} = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10$.

718. а) $\sin 2x + \cos 2x = 1$

$2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 1 = 0$

$2\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$

$\sin x(\cos x - \sin x) = 0$

1) $\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in Z$.

2) $\sin x = \cos x$; $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

б) При помощи окружности (см. рис. 464) отберём корни на промежутке $\left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right]$.

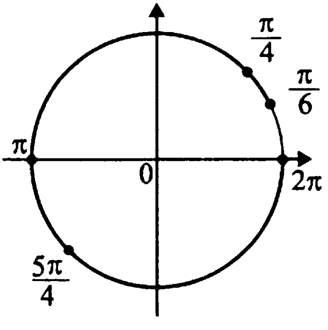


Рис. 464.

Получим корни $\frac{\pi}{4}$; π; $\frac{5\pi}{4}$, 2π.

720. а) $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$,

$16^{\sin^2 x} + 16^{1-\sin^2 x} = 10$,

$$16^{\sin^2 x} + \frac{16}{16^{\sin^2 x}} = 10,$$

Обозначим $16^{\sin^2 x} = t, t \geqslant 1$.

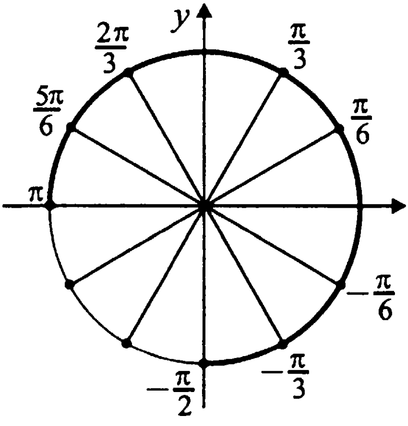
Уравнение примет вид $t + \dfrac{16}{t} = 10$,

$t^2 - 10t + 16 = 0$,
$t_1 = 2, t_2 = 8$.

Вернёмся к исходной переменной.

1) $16^{\sin^2 x} = 2$,	2) $16^{\sin^2 x} = 8$,
$2^{4\sin^2 x} = 2$,	$2^{4\sin^2 x} = 2^3$,
$4\sin^2 x = 1$,	$4\sin^2 x = 3$,
$\sin^2 x = \frac{1}{4}$,	$\sin^2 x = \frac{3}{4}$,
$\sin x = \pm\frac{1}{2}$,	$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.	$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис. 465) отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.



$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6}$,

$x_{3,4} = \pm\frac{\pi}{3}$,

$x_5 = \frac{2\pi}{3}$,

$x_6 = \frac{5\pi}{6}$,

Рис. 465.

722. а) Преобразуем исходное уравнение, воспользовавшись формулой синуса двойного угла, получим:

$4\sin^3 x + 14\sin x\cos x - 4\sin x = 0$;

$2\sin x(2\sin x^2 + 7\cos x - 2) = 0$; $2\sin x(2 - 2\cos x^2 + 7\cos x - 2) = 0$;

$2\sin x(7\cos x - 2\cos x^2) = 0;\ 2\sin x\cos x(7 - 2\cos x) = 0;$

$\sin 2x\left(\cos x - \frac{7}{2}\right) = 0.$

Учитывая, что $\cos x \neq \frac{7}{2}$, получим: $\sin 2x = 0,\ 2x = \pi n,\ n \in Z;\ x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

б) Выберем решения, принадлежащие указанному промежутку, для этого решим двойное неравенство $-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi n}{2} \leqslant \frac{3\pi}{2};\ -\frac{2}{3} < n \leqslant 3$, откуда $n = 0$ и $x = 0,\ n = 1$ и $x = \frac{\pi}{2},\ n = 2$ и $x = \pi,\ n = 3$ и $x = \frac{3\pi}{2}$.

724. а) $\sqrt{3}\sin^2 2x - 2\sin 4x + \sqrt{3}\cos^2 2x = 0;$

$\sqrt{3}(\sin^2 2x + \cos^2 2x) - 2\sin 4x = 0.$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, получим

$\sqrt{3} - 2\sin 4x = 0;\ \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ 4x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{array}\right.$$

б) Найдём корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1,\ 1]$.

1) Рассмотрим серию решений $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Очевидно, что при $k = 0$ значение $x = \frac{\pi}{12}$ — принадлежит отрезку $[-1;\ 1]$, так как $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{4}{12} = \frac{1}{3} < 1$.

При $k \geqslant 1$ значения $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \geqslant \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \geqslant \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2} > 1$ — не принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$.

При $k \leqslant -1$ значения $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \leqslant \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{12} < -\frac{5 \cdot 3}{12} < -1$ — не принадлежат указанному промежутку.

2) Рассмотрим серию решений $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

При $n = 0$ получим $x = \frac{\pi}{6}$ — принадлежит отрезку $[-1;\ 1]$.

При $n \geqslant 1$ значения $x \geqslant \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} > 1$, при $n < -1$ значения $x \leqslant \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} < -1$, так как $\pi > 3$. Промежутку $[-1;\ 1]$ принадлежит лишь $x = \frac{\pi}{6}$.

726. а) $\sin(3\pi - 2x) + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x)$.

$\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x$, $2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = \sin x + \cos x$,

$(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x$, $(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x + \cos x = 1, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z; \\ x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ n \in Z. \end{array}\right.$$

б) Найдём все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$.

1) $\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi n < 2\pi$; $\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{4} + n < 2$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leqslant n < 2 + \frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} \leqslant n < \frac{9}{4}$; $n = 1, n = 2$. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$; $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

2) $\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k < 2\pi$, $\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{4} + (-1)^k\frac{1}{4} + k < 2$.

k — чётное: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \leqslant k < 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} \leqslant k < 2$, $k = 1$ (не является чётным).

k — нечётное: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leqslant k < 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, $1 \leqslant k < 2{,}5$, $k = 1, k = 2$ (не является нечётным).

$x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{\pi}{2}$.

728. а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x} + \left(\frac{3}{7}\right)^{-\sin 2x} = 2$.

Пусть $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x} = t$, $t + \frac{1}{t} = 2$, $t^2 - 2t + 1 = 0, t = 1$.

$\left(\frac{3}{7}\right)^{\sin 2x} = 1$, $\sin 2x = 0$, $2x = \pi k$, $k \in Z$.

$x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

б) $-5\pi \leqslant x < -\frac{7\pi}{2}$, $-5\pi \leqslant \frac{\pi k}{2} < -\frac{7\pi}{2}$, $-5 \leqslant \frac{k}{2} < -\frac{7}{2}$,
$-10 \leqslant k < -7$,
$k = -10$, $x = -5\pi$;
$k = -9$, $x = -\frac{9\pi}{2}$;
$k = -8$, $x = -4\pi$.

730. а) $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$
$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2\sin^2 x \cos x =$
$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Тогда исходное уравнение равносильно уравнению
$4\cos^3 x - 3\cos x = -2\cos x$,
$\cos x(4\cos^2 x - 1) = 0$,
$\cos x = 0$ или $\cos^2 x = \frac{1}{4}$, то есть $\cos x = \pm\frac{1}{2}$,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z;$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ (см. рис. 466).

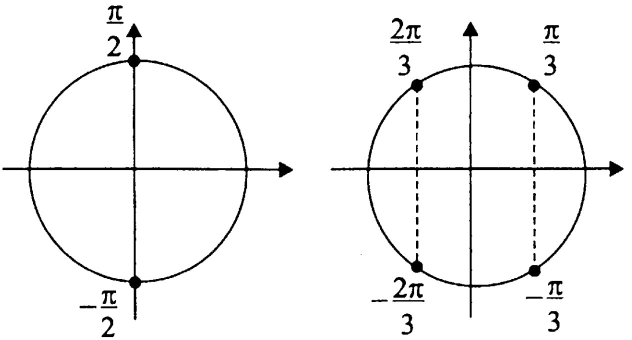


Рис. 466.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие указанному промежутку (см. рис. 467).

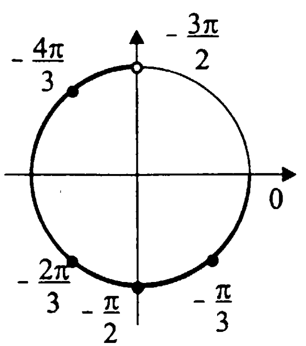


Рис. 467.

Получим: $x = -\frac{4\pi}{3}$; $x = -\frac{2\pi}{3}$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = -\frac{\pi}{3}$.

732. а) Пусть точка O — центр треугольника ABC, точки O_1 и O_2 — центры симметрий граней AA_1B_1B и BB_1C_1C. Необходимо построить сечение призмы плоскостью OO_1O_2 (см. рис. 468).

Так как призма правильная, то грани AA_1B_1B и BB_1C_1C равные прямоугольники. Поэтому расстояния от центров O_1 и O_2 до сторон AB и BC треугольника ABC равны, то есть $O_1M_1 = O_2N_1$. Значит, $O_1O_2 \parallel M_1N_1$ как противоположные стороны прямоугольника $M_1O_1O_2N_1$. Следова-

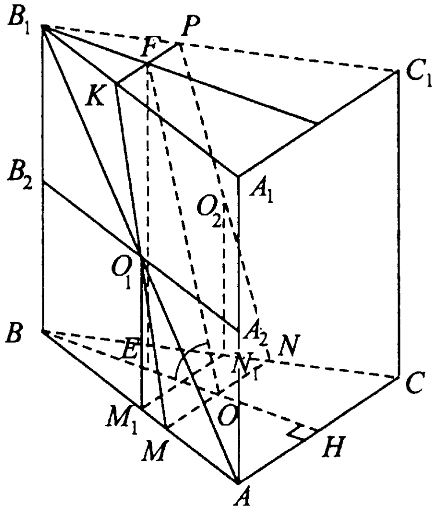


Рис. 468.

тельно, прямая O_1O_2 параллельна плоскости ABC по признаку параллельности прямой и плоскости.

Плоскость сечения OO_1O_2 проходит через прямую O_1O_2 и пересекает плоскость ABC, следовательно, линия пересечения этих плоскостей параллельна прямой O_1O_2. Через точку O проводим прямую MN, параллельную M_1N_1. Прямые MO_1 и NO_2 пересекают плоскость $A_1B_1C_1$ в точках K и P соответственно. Четырёхугольник $MKPN$ — искомое сечение.

б) По свойству параллельных плоскостей $KP \parallel MN$, следовательно, четырёхугольник $MKPN$ — трапеция.

$S_{KMNP} = \dfrac{KP + MN}{2} \cdot FO$, где FO — высота трапеции.

Точка O является одновременно точкой пересечения медиан и высот $\triangle ABC$, поэтому $MN = \frac{2}{3}AC = \dfrac{2}{3} \cdot 6 = 4$, $BH = 3\sqrt{3}$,

$BO = \frac{2}{3}BH = 2\sqrt{3}$.

$\triangle B_1O_1K = \triangle AO_1M$, так как точка O_1 — середина отрезка AB_1 и $AB \parallel A_1B_1$. Из равенства треугольников следует $B_1K = AM = \dfrac{1}{3} \cdot 6 = 2$.

Так как $\triangle KB_1F$ прямоугольный и $\angle B_1KF = 60°$, то

$B_1F = \dfrac{KB_1\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$\triangle KB_1P$ — равносторонний, поэтому $KP = 2$.

Проведём $FE \perp BH$, тогда $BE = B_1F = \sqrt{3}$,
$OE = OB - BE = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

По условию $\angle FOE = 30°$ в прямоугольном треугольнике FEO, поэтому $OF = \dfrac{OE}{\cos 30°}$, $OF = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2$.

$$S_{MKPN} = \frac{2+4}{2} \cdot 2 = 6.$$

734. а) Пусть O и O_1 — центры оснований цилиндра, тогда F и F_1 — середины хорд BC и B_1C_1 соответственно (см. рис. 469). Покажем, что AFF_1 — искомая плоскость. A_1F — медиана, а значит, и высота равнобедренного треугольника A_1BC. $FF_1 \parallel BB_1$, значит, $FF_1 \perp (ABC)$ и, в частности, $FF_1 \perp BC$. Итак, $FF_1 \perp BC$ и $A_1F \perp BC$, тогда $(AFF_1) \perp BC$, откуда $(AFF_1) \perp A_1BC$ и $(AFF_1) \perp BB_1C_1C$. Сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AFF_1 является прямоугольник ADD_1A_1.

б) Угол между плоскостями B_1BC и A_1BC — это угол A_1FF_1:

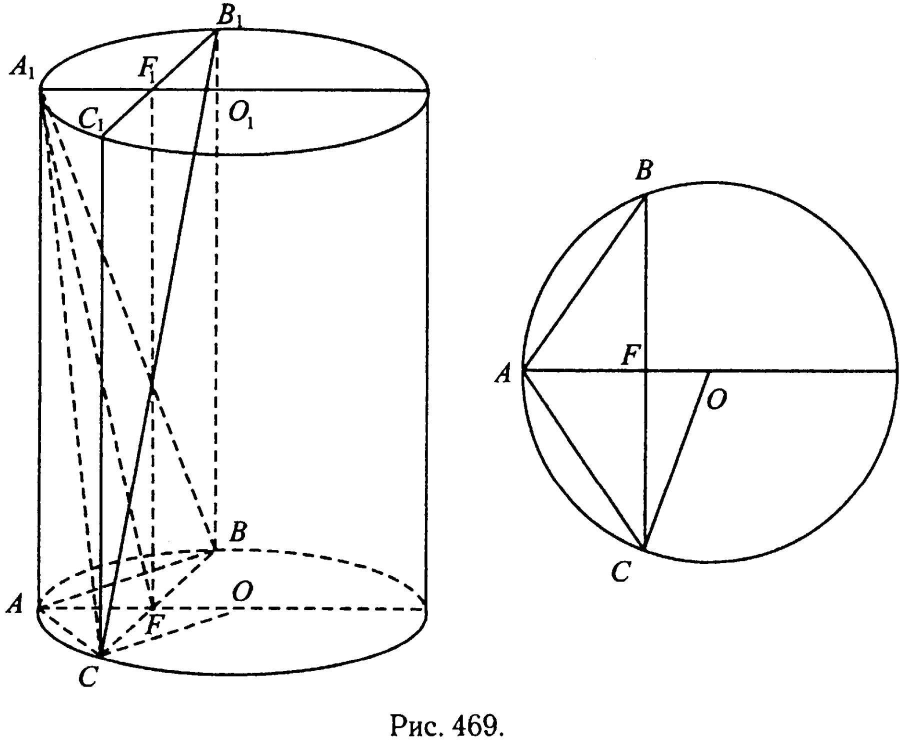


Рис. 469.

$A_1F \in (A_1BC)$, $FF_1 \in (B_1BC)$. $\triangle A_1CB$ — равнобедренный, $A_1F \perp BC$, B_1BCC_1 — прямоугольник, $FF_1 \parallel BB_1$ и $F_1F \perp BC$, отсюда $\angle A_1FF_1$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями A_1CB и B_1BC.

Из $\triangle A_1FF_1$ $\angle A_1F_1F = 90°$, $\operatorname{tg}\angle A_1FF_1 = \frac{A_1F_1}{FF_1}$; $A_1F_1 = AF$; $AF = AO - FO$.

Из $\triangle OFC$, где $\angle OFC = 90°$, $FC = 6$, найдём $FO = \sqrt{OC^2 - FC^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. $AF = 8 - 2\sqrt{7}$.

$$\operatorname{tg}\angle A_1FF_1 = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{24} = \frac{4 - \sqrt{7}}{12}.$$

$$\angle A_1FF_1 = \operatorname{arctg}\frac{4 - \sqrt{7}}{12}.$$

736. Сделаем чертёж (см. рис. 470).

а) В плоскости $A_1B_1C_1$ через точку K проведём $KL \parallel B_1D_1$. В плоскости AA_1B_1 через точку M проведём $LM \parallel C_1D$. Соединим точку M с точкой K. Треугольник MLK — искомое сечение.

б) По условию $A_1D_1 = 1$, $A_1K : KD_1 = 1 : 2$, тогда $A_1K : A_1D_1 = 1 : 3$.

$\triangle LA_1K \backsim \triangle B_1A_1D_1$ по I признаку подобия ($\angle A$ — общий, $\angle A_1KL = \angle A_1D_1B_1$ как соответственные при $LK \parallel B_1D_1$ и секущей A_1D_1).

Из подобия следует $\frac{A_1L}{A_1B_1} = \frac{LK}{B_1D_1} = \frac{A_1K}{A_1D_1} = \frac{1}{3}$.

$A_1B_1 = A_1D_1$, значит, $A_1L = A_1K = \frac{1}{3}$.

Аналогично $A_1K = A_1M = \frac{1}{3}$ (из $\triangle A_1LM$).

Имеем $A_1K = A_1L = A_1M = \frac{1}{3}$.

Прямоугольные треугольники A_1KL, A_1KM и A_1LM равны по двум катетам, значит, $KL = KM = LM = \frac{B_1D_1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$S_{KLM} = \frac{KL^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

738. а) В треугольнике ABC $AH \perp BC$, через точку K проводим $KM \parallel AH$, отсюда $KM \perp BC$ (см. рис. 471).

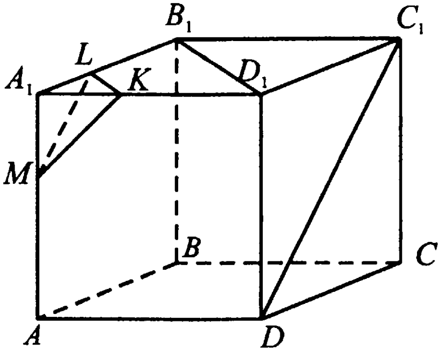


Рис. 470.

$C_1C \perp (ABC)$, как высота прямой призмы, тогда $C_1C \perp KM$, поскольку KM лежит в плоскости (ABC), $KM \perp (BB_1C_1)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости (KM перпендикулярен двум пересекающимся прямым в этой плоскости: BC и CC_1). Следовательно, по признаку перпендикулярности плоскостей следует, что $(C_1MK) \perp (BB_1C_1)$, так как (C_1MK) содержит прямую $KM \perp (BB_1C_1)$. Значит, (KC_1M) — искомое сечение.

б) Проекция C_1K на плоскость BB_1C_1C: $MK \perp BC$, C_1M — проекция C_1K (см. рис. 471).

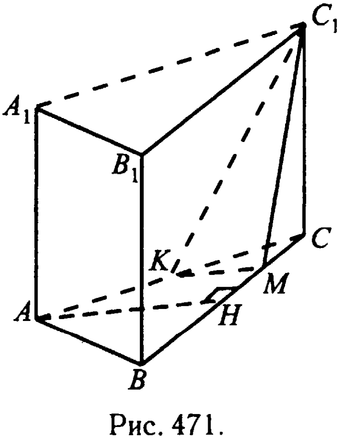


Рис. 471.

$\angle KC_1M$ — искомый угол.

$$\cos \angle KC_1M = \frac{C_1M^2 + C_1K^2 - MK^2}{2C_1M \cdot C_1K}.$$

Из $\triangle C_1MC$, где $\angle C_1CM = 90°$, найдём C_1M: $C_1M = \sqrt{C_1C^2 + MC^2} = \sqrt{6+1} = \sqrt{7}$.

Из $\triangle CC_1K$, где $\angle C_1CK = 90°$, найдём C_1K: $C_1K = \sqrt{CC_1^2 + CK^2} = \sqrt{6+4} = \sqrt{10}$.

Из $\triangle CKM$, где $\angle KCM = 60°$, $\angle KMC = 90°$ найдём MK, $MK = KC \cdot \sin 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Итак, $\cos \angle KC_1M = \frac{7+10-3}{2 \cdot \sqrt{70}} = \frac{14}{2\sqrt{70}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$.

740. а) Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду $EABCD$ и построим сечение, проходящее через вершины B и D, перпендикулярное ребру AE. Проведём $BK \perp AE$ и докажем, что $DK \perp AE$ (см. рис. 472 а).

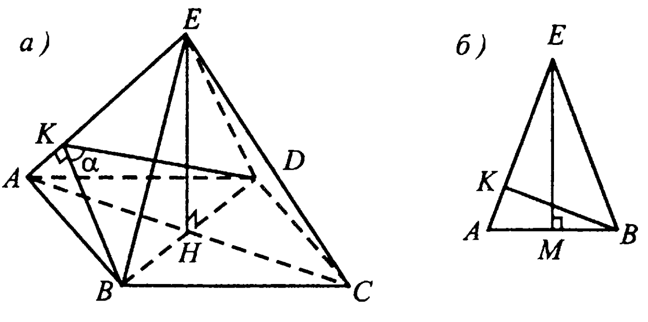


Рис. 472.

В треугольниках AKB и AKD сторона AK — общая, $AB = AD$ и $\angle BAK = \angle DAK$ (в правильной четырёхугольной пирамиде боковые грани равны, а в основании лежит квадрат). Следовательно, $\triangle AKB = \triangle AKD$ по первому признаку равенства треугольников. Поэтому $\angle AKB = \angle AKD = 90°$. Значит, $AE \perp DK$ и $AE \perp$ плоскости BKD. Таким образом, BKD — искомое сечение.

б) Пусть EH — высота пирамиды $EABCD$ (см. рис. 472 а).

$$AC = BD = AB \cdot \sqrt{2} = 18\sqrt{2},\ AH = \frac{1}{2}AC = 9\sqrt{2}.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AEH $AE = \sqrt{AH^2 + EH^2} = \sqrt{(9\sqrt{2})^2 + 24^2} = \sqrt{738}$.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABE (см. рис. 472 б). Апофему EM найдём из $\triangle MBE$, учитывая, что $MB = \frac{1}{2}AB = 9$.

$EM = \sqrt{BE^2 - MB^2} = \sqrt{738 - 81} = \sqrt{657}.$

Найдём высоту BK из формулы площади для $\triangle AEB$.

$S_{AEB} = \frac{1}{2}EM \cdot AB = \frac{1}{2}EA \cdot BK.$

Отсюда $BK = \dfrac{EM \cdot AB}{EA} = \dfrac{\sqrt{657}}{\sqrt{738}} \cdot 18.$

Так как $\triangle AKB = \triangle AKD$ (см. пункт а), то $DK = BK$.

По теореме косинусов для $\triangle BKD$:

$BD^2 = DK^2 + BK^2 - 2DK \cdot BK \cos\alpha$, где $\alpha = \angle BKD$ — угол между смежными боковыми гранями.

$(18\sqrt{2})^2 = \dfrac{657 \cdot 18^2}{738} \cdot 2 \cdot (1 - \cos\alpha),$

$1 - \cos\alpha = \dfrac{738}{657}, \cos\alpha = 1 - \dfrac{738}{657} = -\dfrac{9}{73}.$

742. Построим осевое сечение конуса, получим равнобедренную трапецию с основаниями $AD = 2R$ и $BC = 2r$. Вписанный шар в сечении даёт окружность, вписанную в трапецию, высота трапеции будет равна диаметру этой окружности.

Так как $S_{\text{н.осн}} = 4S_{\text{в.осн}}$, то $\pi R^2 = 4\pi r^2$, или $R = 2r$.

а) По свойству касательных $AB = BM + AN$, $AB = r + R = 3r$.

б) $AK = AN - KN = R - r = r$.

Тогда из $\triangle ABK$:

$\cos\alpha = \dfrac{AK}{BA} = \dfrac{r}{3r} = \dfrac{1}{3}$, $\alpha = \arccos\dfrac{1}{3}$ (см. рис. 473).

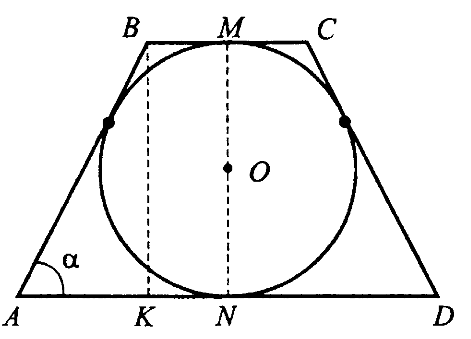


Рис. 473.

744. Решим исходное неравенство.

ОДЗ. $\begin{cases} 4^{x+2}>0, \\ 4^{x+2}\neq 1, \\ -16x>0, \\ \log_{4^{x+2}}(-16x)\neq 0, \\ 4^x>0, \\ \log_{\frac14}4^x>0, \\ \log_4\log_{\frac14}4^x\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+2\neq 0, \\ x<0, \\ -16x\neq 1, \\ \log_4 4^x<0, \\ \log_{\frac14}4^x\neq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x\neq -2, \\ x<0, \\ x\neq -\dfrac{1}{16}, \\ x\neq -1. \end{cases}$ $x\in(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ -1)\cup\left(-1;\ -\frac{1}{16}\right)\cup\left(-\frac{1}{16};\ 0\right).$

На ОДЗ преобразуем исходное неравенство, перейдя к основанию 4 в обеих его частях:

$$\frac{\left(\dfrac{\log_4 16}{\log_4 4^{x+2}}\right)}{\left(\dfrac{\log_4(-16x)}{\log_4 4^{x+2}}\right)}\leqslant\frac{1}{\log_4\log_4\dfrac{1}{4^x}};\qquad \frac{\log_4 16}{\log_4(-16x)}\leqslant\frac{1}{\log_4(-x)};$$

$$\frac{2}{\log_4(-x)+\log_4 16}\leqslant\frac{1}{\log_4(-x)};\qquad \frac{2}{\log_4(-x)+2}\leqslant\frac{1}{\log_4(-x)}.$$

Сделаем замену $t=\log_4(-x)$, тогда $\dfrac{2}{t+2}\leqslant\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{2t}{t(t+2)}\leqslant\dfrac{t+2}{t(t+2)}$, $\dfrac{t-2}{t(t+2)}\leqslant 0$. Решим последнее неравенство методом интервалов (см. рис. 474) , получим $t\in(-\infty;\ -2)\cup(0;\ 2]$. Вернёмся к исходной переменной. Рассмотрим 2 случая.

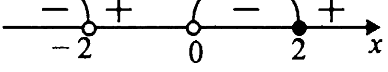


Рис. 474.

1) $\log_4(-x)<-2$, $\log_4(-x)<\log_4\dfrac{1}{16}$, $x>-\dfrac{1}{16}$.

2) $0<\log_4(-x)\leqslant 2$, $\log_4 1<\log_4(-x)\leqslant\log_4 16$, $-16\leqslant x<-1$.

С учётом ОДЗ запишем ответ: $x\in[-16;\ -2)\cup(-2;\ -1)\cup\left(-\dfrac{1}{16};\ 0\right)$.

746. ОДЗ: $x > 0$.

$$(x-1)(2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 2) < 0.$$

$$(x-1)(\log_3 x - 2)(2\log_3 x - 1) < 0.$$

На ОДЗ выражение $\log_3 x - 2 = \log_3 x - \log_3 9$ — совпадает по знаку с выражением $x-9$, выражение $2\log_3 x - 1 = 2(\log_3 x - \log_3\sqrt{3})$ — с выражением $x-\sqrt{3}$. Получим, что исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $(x-1)(x-9)(x-\sqrt{3}) < 0$. Решив его методом интервалов, получим $x \in (-\infty; 1) \cup (\sqrt{3}; 9)$. Учитывая ОДЗ, $x \in (0; 1) \cup (\sqrt{3}; 9)$.

Замечание. Решить исходное неравенство можно иначе, заменив его следующей совокупностью: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>0, \\ 2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 2 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0, \\ 2\log_3^2 x - 5\log_3 x + 2 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Однако такое решение получилось бы более громоздким.

748. ОДЗ $\begin{cases} x-1>0, \\ x+1>0, \\ \dfrac{x+1}{x-1} > 0, \\ \dfrac{x+1}{x-1} \neq 1, \\ x-1 \neq 0; \end{cases}$ $\quad x > 1$

$$\log_2\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{\log_2\dfrac{x+1}{x-1}} > 0,\ t = \log_2\frac{x-1}{x+1},$$

$$t - \frac{1}{t} > 0,$$

$$\frac{(t-1)(t+1)}{t} > 0 \text{ (см. рис. 475).}$$

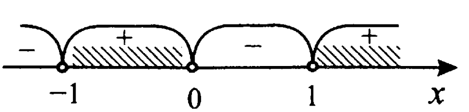


Рис. 475.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t > -1, \\ t < 0, \end{cases} \\ t > 1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} \log_2 \dfrac{x-1}{x+1} > -1, \\ \log_2 \dfrac{x-1}{x+1} < 0, \end{cases} \\ \log_2 \dfrac{x-1}{x+1} > 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \log_2 \dfrac{x-1}{x+1} > \log_2 \dfrac{1}{2}, \\ \log_2 \dfrac{x-1}{x+1} < \log_2 1, \end{cases} \\ \log_2 \dfrac{x-1}{x+1} > \log_2 2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} > \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x-1}{x+1} < 1, \end{cases} \\ \dfrac{x-1}{x+1} > 2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} \dfrac{x-3}{x+1} > 0, \\ \dfrac{-2}{x+1} < 0, \end{cases} \\ \dfrac{-x-3}{x+1} > 0. \end{array}\right. \quad \text{(см. рис. 476).}$$

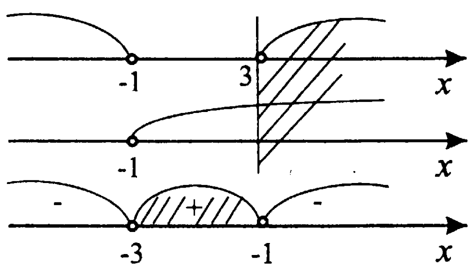


Рис. 476.

С учётом ОДЗ: $x > 3$.

750. $||3^x + 4x - 9| - 8| \leqslant 3^x - 4x - 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} |3^x + 4x - 9| \leqslant 3^x - 4x + 7, \\ |3^x + 4x - 9| \geqslant -3^x + 4x + 9; \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x + 4x - 9 \leqslant 3^x - 4x + 7, \\ 3^x + 4x - 9 \geqslant -3^x + 4x - 7, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} 3^x + 4x - 9 \geqslant -3^x + 4x + 9, \\ 3^x + 4x - 9 \leqslant 3^x - 4x - 9; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 2, \\ 3^x \geqslant 1, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} 3^x \geqslant 9, \\ x \leqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \geqslant 0, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

752. 1) $\log_{4-x}\dfrac{x+5}{(x-4)^2} \geqslant -2$.

ОДЗ $\begin{cases} \dfrac{x+5}{(x-4)^2} > 0, \\ 4-x > 0, \\ 4-x \neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x > -5, \\ x < 4, \\ x \neq 3. \end{cases}$

ОДЗ: $x \in (-5;3) \cup (3;4)$ (см. рис. 477).

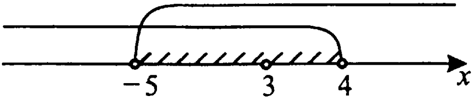


Рис. 477.

$\log_{4-x}(x+5) - \log_{4-x}(x-4)^2 \geqslant -2$, $\log_{4-x}(x+5) - 2 \geqslant -2$,
$\log_{4-x}(x+5) \geqslant 0$, $\log_{4-x}(x+5) \geqslant \log_{4-x} 1$.

а) $\begin{cases} 0 < 4-x < 1, \\ x+5 \leqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} -4 < -x < -3, \\ x \leqslant -4; \end{cases}$

$\begin{cases} 3 < x < 4, \\ x \leqslant -4; \end{cases}$ решений нет.

б) $\begin{cases} 4-x > 1, \\ x+5 \geqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3, \\ x \geqslant -4; \end{cases}$ $-4 \leqslant x < 3$.

Учитывая ОДЗ, получим $[-4;3)$.

2) $x^3 + 7x^2 + \dfrac{27x^2 + 5x - 25}{x-5} \leqslant 5$, $x \neq 5$.

$$\frac{x^4 + 7x^3 - 5x^3 - 35x^2 + 27x^2 + 5x - 25 - 5x + 25}{x-5} \leqslant 0,$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 8x^2}{x-5} \leqslant 0, \quad \frac{x^2(x^2+2x-8)}{x-5} \leqslant 0.$$

$x^2 + 2x - 8 = 0$, $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -8$, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

$\dfrac{x^2(x+4)(x-2)}{x-5} \leqslant 0$ (см. рис. 478).

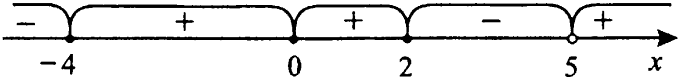


Рис. 478.

$x \leqslant -4$, $x = 0$, $2 \leqslant x < 5$.

3) Решение исходной системы (см. рис. 479).

$x = -4$, $x = 0$, $x \in [2;3)$.

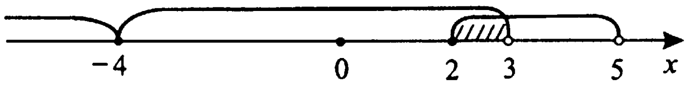


Рис. 479.

754. 1.Решим первое неравенство системы:

$25^{x-1} - 27 \cdot 5^{x-2} + 2 \geqslant 0,$

$(5^x)^2 - 27 \cdot 5^x + 50 \geqslant 0.$

Обозначим $5^x = t, t > 0$.

Неравенство примет вид:

$t^2 - 27t + 50 \geqslant 0,$

$(t-2)(t-25) \geqslant 0,$

$t \leqslant 2, t \geqslant 25.$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 5^x \leqslant 2, \\ 5^x \geqslant 25; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \leqslant \log_5 2, \\ x \geqslant 2. \end{array}\right.$$

2. Решим второе неравенство системы $\log_x (x-6)^2 \leqslant 0$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad x \in (0;1) \cup (1;6) \cup (6;+\infty).$$

$\log_x (x-6)^2 - \log_x 1 \leqslant 0,$

$(x-1)(x^2 - 12x + 36 - 1) \leqslant 0,$

$(x-1)(x^2 - 12x + 35) \leqslant 0,$

$(x-1)(x-5)(x-7) \leqslant 0$ (см. рис. 480).

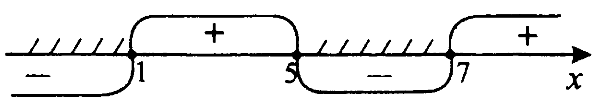


Рис. 480.

$x \leqslant 1, \;\; 5 \leqslant x \leqslant 7,$

Учитывая ОДЗ, получим $(0;1) \cup [5;6) \cup (6;7]$.

3. Определим решение исходной системы (см. рис. 481).

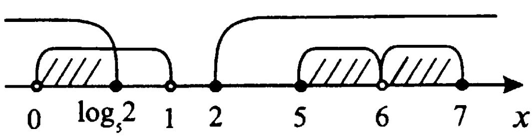


Рис. 481.

$x \in (0; \log_5 2] \cup [5;6) \cup (6;7].$

756. 1. Решим первое неравенство системы.

$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{4-x^2}{2}} \geqslant 27^x,$

$3^{x^2-4} \geqslant 3^{3x},$

$x^2 - 4 \geqslant 3x,$

$x^2 - 3x - 4 \geqslant 0,$

$(x+1)(x-4) \geqslant 0,$

$x \leqslant -1; x \geqslant 4.$

2. Решим второе неравенство системы.

$\log_{x+2}(2x^2 + x) > 2$

ОДЗ: $\begin{cases} x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ 2x^2 + x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2, \\ x \neq -1, \\ \left[\begin{array}{l} x < -\frac{1}{2}, \\ x > 0; \end{array} \right. \end{cases}$

$x \in (-2; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty).$

$\log_{x+2}(2x^2 + x) - \log_{x+2}(x+2)^2 > 0,$

$(x+2-1)(2x^2 + x - (x+2)^2) > 0,$

$(x+1)(x^2 - 3x - 4) > 0,$

$(x+1)^2(x-4) > 0.$

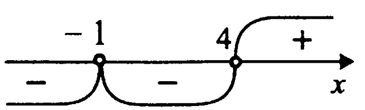


Рис. 482.

$x \in (4; +\infty)$

Учитывая ОДЗ, имеем $x \in (4; +\infty)$.

758. 1) $5^x + \frac{20}{5^x} - 9 \geqslant 0.$

$\frac{(5^x)^2 - 9 \cdot 5^x + 20}{5^x} \geqslant 0.$ Обозначим $5^x = t$, $t > 0$ (см. рис. 483).

$\frac{t^2 - 9t + 20}{t} \geqslant 0,$

$\frac{(t-4)(t-5)}{t} \geqslant 0.$

$0 < t \leqslant 4, t \geqslant 5.$

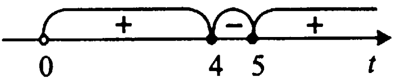


Рис. 483.

$0 < 5^x \leqslant 5^{\log_5 4}, 5^x \geqslant 5^1;$

$x \leqslant \log_5 4, x \geqslant 1.$

2) $\log_{x+5}\left(\frac{x+2}{5}\right) \leqslant \log_{x+5} 1.$

а) $\begin{cases} x+5>1, \\ 0<\frac{x+2}{5}\leqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-4, \\ 0<x+2\leqslant 5, \end{cases}$ $\begin{cases} x>-4, \\ -2<x\leqslant 3, \end{cases}$ $-2 < x \leqslant 3.$

б) $\begin{cases} 0<x+5<1, \\ \frac{x+2}{5}\geqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} -5<x<-4, \\ x+2\geqslant 5, \end{cases}$ $\begin{cases} -5<x<-4, \\ x\geqslant 3, \end{cases}$ нет решения.

3) Решим систему

$\begin{cases} x\leqslant \log_5 4, x\geqslant 1, \\ -2<x\leqslant 3; \end{cases} \Rightarrow -2 < x \leqslant \log_5 4, 1 \leqslant x \leqslant 3.$

760. Сделаем чертёж по условию задачи (см. рис. 484).

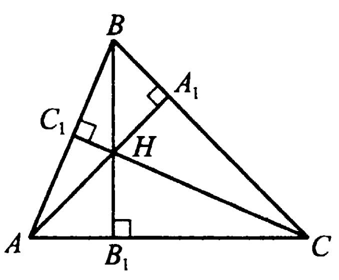


Рис. 484.

а) Рассмотрим прямоугольные треугольники BHA_1 и BB_1C. Острый угол B_1BC у них общий, значит, острые углы BHA_1 и ACB также равны.

б) Рассмотрев аналогично предыдущему пункту треугольники BC_1H и BB_1A, получим $\angle BHC_1 = \angle BAC$. Тогда $\triangle BC_1H \sim \triangle CC_1A$ по трём углам, откуда $\frac{BH}{AC} = \frac{BC_1}{CC_1}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник

BC_1C. Так как $\angle ABC = 45°$, то $BC_1 = C_1C$ и, значит, $\frac{BH}{AC} = \frac{BC_1}{CC_1} = 1$, $AC = BH = 17$.

762. а) Предположим, что это не так. Тогда проведём прямую Q_2P до пересечения с первой окружностью в точке Q_1' (см. рис. 485).

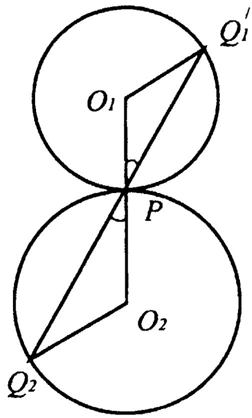


Рис. 485.

Точки O_1, P, O_2 лежат на одной прямой и $\angle O_1PQ_1' = \angle Q_2PO_2$ (как вертикальные), при этом $\angle O_1PQ_1' = \angle O_1Q_1'P$ (как углы при основании равнобедренного $\triangle O_1PQ_1'$), $O_1P = O_1Q_1'$ (как радиусы).
Аналогично $\angle O_2PQ_2 = \angle O_2Q_2P$.
Но тогда $\angle O_1Q_1'P = \angle PQ_2O_2$, а это накрест лежащие углы при O_1Q_1' и O_2Q_2 и секущей $Q_1'Q_2$, поэтому $O_1Q_1' || O_2Q_2$.
Но по условию $O_1Q_1 || O_2Q_2$. Через точку O_1 проходит единственная прямая, параллельная O_2Q_2, поэтому точки Q_1, P и Q_1' лежат на одной прямой, которая пересекает первую окружность в двух точках.

Однако Q_1' и Q_2 лежат по разные стороны прямой O_1O_2 по построению, поэтому Q_1' и Q_1 совпадают, и точка P лежит на Q_1Q_2.
б) $\triangle PO_2Q_2$ — равнобедренный (см. рис. 486), поэтому
$\angle O_2PQ_2 = \angle PQ_2O_2$. Так как $\angle PO_2Q_2 = 60°$, то
$\angle PQ_2O_2 = \angle Q_2PO_2 = 60°$.

Так как угол $\angle O_1PQ_1 = \angle O_2PQ_2$, то $\angle O_1PQ_1 = 60°$,
$\angle Q_1O_1P = 60°$.
Обозначим искомый радиус R. Из $\triangle O_1Q_1O_2$ по теореме косинусов имеем
$Q_1O_2^2 = O_1Q_1^2 + O_1O_2^2 - 2O_1Q_1 \cdot O_1O_2 \cos 60°$,

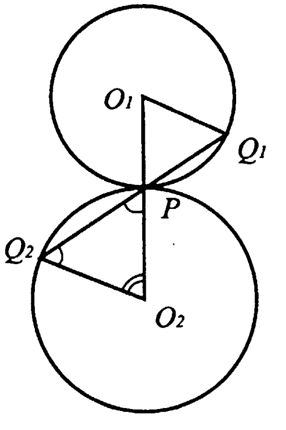


Рис. 486.

$112 = 16 + (R+4)^2 - 4(R+4)$; $R^2 + 4R - 96 = 0$,
$R = -2 \pm 10$, $R = 8$.

764. а) Выполним схематический рисунок 487.

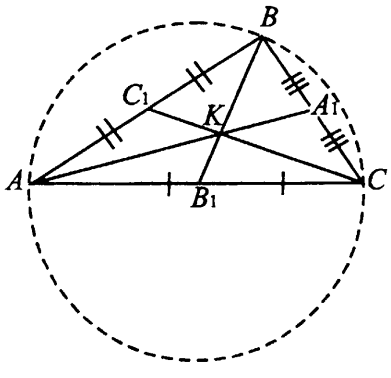


Рис. 487.

По условию AA_1, BB_1, CC_1 — медианы, K — точка пересечения медиан, значит, $\dfrac{BK}{B_1K} = \dfrac{2}{1}$.

Пусть $B_1K = x$, тогда $BK = 2x$, $BB_1 = 3x$, $AC = 6x$.
Имеем $B_1A = B_1B = B_1C = 3x$.
Следовательно, около треугольника ABC можно описать окружность радиусом $3x$ с центром в точке B_1.
$\angle ABC$ — вписанный, опирающийся на диаметр, $\angle ABC = 90°$, отсюда $\triangle ABC$ — прямоугольный, что и требовалось доказать.

б) 1. Радиус окружности (см. рис. 488), вписанной в прямоугольный треугольник ABC, найдём по формуле $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, где a и b — катеты, c — гипотенуза.

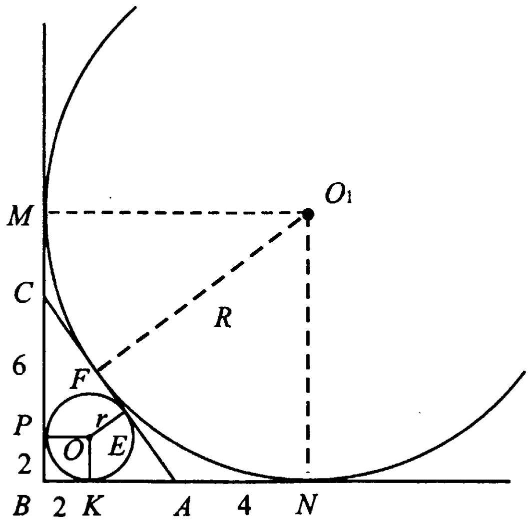


Рис. 488.

$$r = \frac{AB+BC-AC}{2},\quad BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

$$r = \frac{6+8-10}{2} = 2.$$

2. Пусть окружность с центром в точке O касается сторон треугольника ABC в точках P, K, E.

Тогда $OP \perp BC, OK \perp AB, OE \perp AC$ (как радиусы, проведённые в точки касания), следовательно, $BPOK$ — квадрат, $BP = BK = r = 2$.

Аналогично для окружности с центром в точке O_1 (окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BC и BA):

BMO_1N — квадрат, $BM = BN = R$, где R — радиус этой окружности.

Пусть $CF = t$, тогда $AF = 10 - t$

3. $CF = CM = t$, $AN = AF = 10 - t$, $CE = CP = 6$ (как отрезки касательных, проведённых из точек C и A соответственно).

Имеем: $BM = BC + CM = 8 + t$, $BN = AB + AN = 6 + 10 - t = 16 - t$.

Из равенства $BM = BN$ следует: $8 + t = 16 - t$, $2t = 8$, $t = 4$, $CF = 4$.

4. $EF = CE - CF = 6 - 4 = 2$.

766. а) Рассмотрим исходную окружность и четырёхугольник $AMLB$ (см. рис. 489).

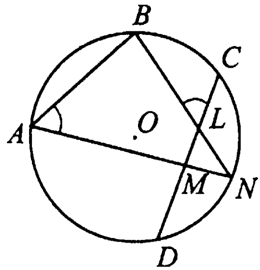


Рис. 489.

По свойству вписанного угла $\angle BAN = \frac{1}{2}\smile BN = \frac{1}{2}(\smile BC + \smile CN)$.

По свойству угла между пересекающимися хордами

$\angle BLC = \frac{1}{2}(\smile BC + \smile DN)$.

По условию $\smile DN = \smile CN$, поэтому $\angle BAN = \angle BLC$. $\angle BLC + \angle BLM = 180°$ (смежные углы), тогда $\angle BLM + \angle BAM = 180°$, что по признаку вписанного четырёхугольника означает, что $AMLB$ вписан (сумма противоположных углов равна $180°$).

б) Заметим, что $\smile NA = \smile NB$

(так как $\smile NA = \smile ND + \smile DA = \smile NC + \smile CB$).

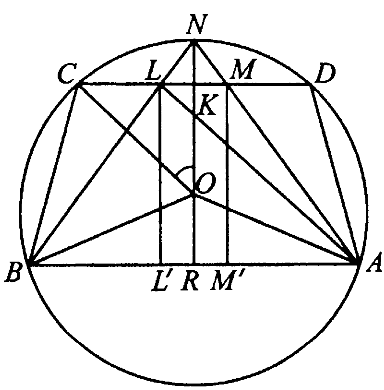


Рис. 490.

При этом $\smile NA + \smile NB = 360° - \smile AB = 240°$, откуда $\smile NA = \smile NB = \smile AB = 120°$, $\angle NBA = \angle NAB = \angle ANB = 60°$

(см. рис. 490), как вписанные углы, опирающиеся на дуги в 120 градусов.
Из $\triangle OAB$ по теореме косинусов
$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ = 3\,OA^2$, $AB = \sqrt{3}\,OA = 12$.

Заметим также, что $\angle NMC = \frac{1}{2}(\smile CN + \smile AD) =$

$= \frac{1}{2}(\smile CN + \smile BC) = \angle NAB.$

Но тогда $LM \parallel AB$, так как равны соответственные углы при пересечении LM и AB секущей NA.
Значит, $AMLB$ — трапеция, а так как углы при основании равны ($\angle LBA = \angle MAB$), $AMLB$ — равнобедренная трапеция.
Проведём её высоту KR через точку O.
Из $\triangle OBR$ получим $OR = \sqrt{OB^2 - BR^2} = 2\sqrt{3}$,
$OK = CO \cdot \cos \angle CON = \sqrt{3}$ и $KR = OR + OK = 3\sqrt{3}$.
Опустим высоту $LL' = KR$, тогда $BL' = LL' \operatorname{ctg} 60^\circ = 3$.
Если провести высоту MM', то $M'A = 3$ и
$LM = L'M' = AB - 2BL' = 6$,
$AL = \sqrt{(AL')^2 + (LL')^2} = 6\sqrt{3}$.
Окружность радиуса R, описанная около $AMLB$, описана и около $\triangle ALB$. По теореме синусов $2R = \dfrac{AL}{\sin \angle ABL} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 12$, $R = 6$.

768. а) $\dfrac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \dfrac{BO}{OD}$ (треугольники ABO и AOD с общей высотой, проведённой из вершины A (см. рис. 491)). $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ по двум углам, откуда следует соотношение: $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{BO}{OD}$, а значит, и $\dfrac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \dfrac{BC}{AD}$.

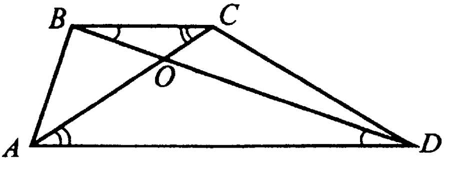


Рис. 491.

б) $\dfrac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \dfrac{1}{4}$.

$\dfrac{2}{S_{AOD}} = \dfrac{1}{4}$. $S_{AOD} = 8$.

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$, $BC : AD = 1 : 4$ (см. рис. 492).

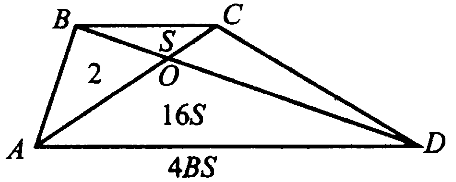


Рис. 492.

Тогда $S_{BOC} = \frac{1}{16}S_{AOD} = \frac{1}{2}$. Из соотношения $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}} = \frac{BO}{OD} = \frac{1}{4}$. $S_{COD} = 4S_{BOC} = 2$. Итак, $S_{ABCD} = S_{COD} + S_{BOC} + S_{ABO} + S_{AOD} = 2 + \frac{1}{2} + 2 + 8 = 12{,}5$.

770. а) В трапеции $ABCD$ треугольники AOD и BOC подобны, поскольку $\angle OAD = \angle OCB$ и $\angle ODA = \angle OBC$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD соответственно (см. рис. 493).

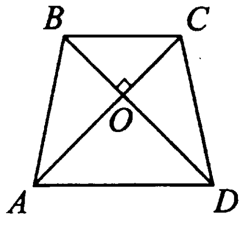


Рис. 493.

Значит, $\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$. Умножая почленно это равенство на равенство $AO \cdot CO = BO \cdot DO$ из условия задачи, получим $AO^2 = DO^2$. Отсюда $AO = DO$, $BO = CO$ и треугольники AOB и DOC равны по 1-му признаку равенств треугольников ($\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные). Следовательно, $AB = CD$.

б) Т. к. трапеция $ABCD$ равнобедренная, то вокруг неё можно описать окружность. Обозначим её радиус через R.

Треугольники AOD и BOC равнобедренные и прямоугольные. Значит, $\angle OAD = 45°$ и $CO = \frac{BC}{\sqrt{2}}$, $DO = \frac{AD}{\sqrt{2}}$. По теореме синусов для треугольника ACD имеем:

$$\frac{CD}{\sin\angle CAD} = 2R,\ CD = R\sqrt{2},\ R = \frac{CD}{\sqrt{2}}.$$

По теореме Пифагора для треугольника COD:

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 = \frac{1}{2}(AD^2 + BC^2) = 50.$$

Отсюда $CD = 5\sqrt{2}$ и $R = 5$.

772. Пусть x рублей составила прибыль. На реконструкцию производственной базы израсходовали $0{,}2x$ рублей, после чего осталось $x - 0{,}2x = 0{,}8x$ рублей. На строительство спортивного комплекса израсходовали $0{,}8x \cdot 0{,}25 = 0{,}2x$ рублей. $0{,}1x$ рублей осталось нераспределёнными. По условию 4 200 000 рублей выплатили дивидендов. Составим и решим уравнение.

$$0{,}2x + 0{,}2x + 0{,}1x + 4\,200\,000 = x,$$
$$0{,}5x = 4\,200\,000,$$
$$x = 8\,400\,000.$$

8 400 000 рублей составила прибыль.

775. Пусть a рублей — сумма кредита, x рублей — ежегодный платёж, $m\%$ — годовой процент. Тогда каждый год оставшаяся сумма умножается на $t = \left(1 + \frac{m}{100}\right)$.

После первой выплаты сумма долга составит $a_1 = at - x$.

После второй выплаты $a_2 = a_1t - x = (at - x)t - x = at^2 - (t+1)x$.

После третьей выплаты

$$a_3 = a_2t - x = \left(at^2 - (t+1)x\right)t - x = at^3 - t^2x - tx - x =$$
$$= at^3 - (t^2 + t + 1)x = at^3 - \frac{t^3 - 1}{t - 1}x.$$

По условию за три выплаты клиент оплатил кредит полностью.

$$at^3 - \frac{t^3 - 1}{t - 1}x = 0,$$
$$x = \frac{at^3(t-1)}{t^3 - 1}.$$
$$a = 12\,000\,000,\ m = 20,\ t = 1{,}2.$$
$$x = \frac{12\,000\,000 \cdot 1{,}2^3 \cdot 0{,}2}{1{,}2^3 - 1} \approx 5\,696\,703.$$

778. За первый год прибыль составила $550 - 350 - 100 = 100$ (тысяч долларов). Увеличение прибыли каждый год составляло
$550 \cdot 0{,}1 - 350 \cdot 0{,}06 - 100 \cdot 0{,}04 = 30$ тысяч долларов. Запишем ряд чисел, равных прибылям: 100, 130, 160, 190, 220, 250 ...

Можно последовательно складывать эти числа, пока сумма не достигнет 800.

Или же можно заметить, что этот ряд представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $b_1 = 100$ и разностью $d = 30$. Сумма первых k членов такой прогрессии равна $\frac{2a_1 + d(k-1)}{2} \cdot k$, тогда

$\frac{200 + 30(k-1)}{2} \cdot k \geqslant 800$, $(200+30k-30)k \geqslant 1\,600$, $30k^2+170k-1\,600 \geqslant 0$,

$3k^2 + 17k - 160 \geqslant 0$, $k \leqslant -10\frac{2}{3}$, $k \geqslant 5$.

Значит, за 5 лет суммарная прибыль будет равна 800 тысяч долларов.

780. Решим систему графически. Первое уравнение задаёт окружность радиуса 2 с центром в точке (4; 4) (см. рис. 494).

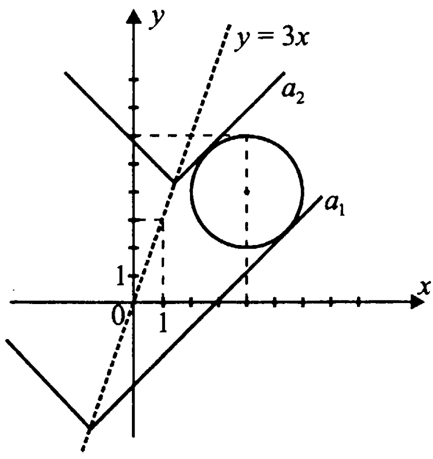


Рис. 494.

График второго — смещённый график $y = |x|$, «уголок» с вершиной в точке $(a; 3a)$. Очевидно, что вершина уголка лежит на прямой $y = 3x$. Из рисунка видно, что единственная общая точка у графиков возможна в двух случаях. В обоих из них окружность касается правой части уголка $(x \geqslant a)$, то есть с прямой $y = x + 2a$. Найдём эти значения a. Уравнение $(x-4)^2 + ((x+2a)-4)^2 = 4$ должно иметь ровно один корень.

Преобразуем уравнение:

$x^2 - 8x + 16 + x^2 + 4a^2 + 16 + 4ax - 8x - 16a - 4 = 0;$

$2x^2 + (4a-16)x + 28 + 4a^2 - 16a = 0;$ $x^2 + (2a-8)x + 14 + 2a^2 - 8a = 0.$

Уравнение будет иметь единственное решение, если дискриминант D равен 0. При этом $\frac{D}{4} = (a-4)^2 - 14 - 2a^2 + 8a = -a^2 + 2 = 0$. Отсюда $a = \pm\sqrt{2}$.

782. $x^2 + 3x - 3 + |x - a| > 1$, $|x - a| > -x^2 - 3x + 4$.
Рассмотрим функции $g(x) = |x - a|$ и $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.
На рисунке 495 изображены эскизы графиков этих функций.

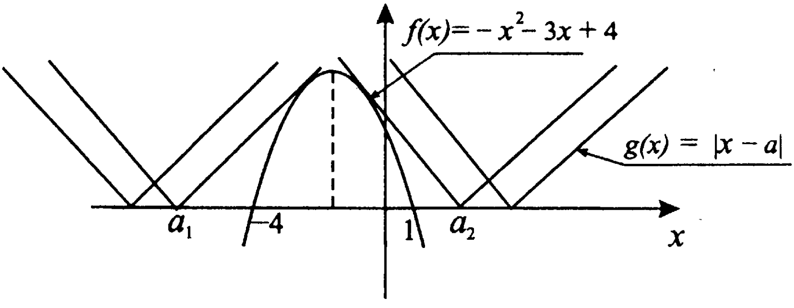


Рис. 495.

Неравенство $g(x) > f(x)$ выполняется для всех x тогда и только тогда, когда график функции g лежит выше графика функции f.
Искомые значения параметра a определяются совокупностью неравенств
$$\left[\begin{array}{l} a < a_1, \\ a > a_2. \end{array}\right.$$
Найдём значения a_1 и a_2 при условии, что уравнения
$x - a_1 = -x^2 - 3x + 4$ и $a_2 - x = -x^2 - 3x + 4$ имеют единственный корень.
1. $x^2 + 4x - 4 - a_1 = 0$,
$\frac{D}{4} = 0$, $4 + 4 + a_1 = 0$, $a_1 = -8$.
2. $x^2 + 2x - 4 + a_2 = 0$,
$\frac{D}{4} = 0$, $1 + 4 - a_2 = 0$, $a_2 = 5$.
Искомые значения $a < -8$ или $a > 5$.

784. Рассмотрим функцию $f(x) = 6\sqrt{x-1} + 5\log_3(2x - 1)$. Она определена при $x \geqslant 1$ и возрастает на области определения. Значит, уравнение $f(x) + 11a = 0$ может иметь только единственное решение (при соответствующих значениях параметра a). Это решение принадлежит отрезку $[2;\ 5]$ тогда и только тогда, когда $f(2) + 11a \leqslant 0$ и $f(5) + 11a \geqslant 0$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 6+5+11a \leqslant 0, \\ 12+10+11a \geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 11a+11 \leqslant 0, \\ 11a+22 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $-2 \leqslant a \leqslant -1$.

786. Пусть в данном уравнении 2 корня, $x_1 < x_2$, $x_2 \geqslant 0{,}5$.

Сделаем замену $9^{-x} = t$, $t \in (0; +\infty)$.

Тогда уравнение примет вид $at + a + 1 + \dfrac{t^2}{3} = 0$.

Пусть это квадратное уравнение имеет два корня $t_1 > t_2 > 0$. Тогда условие будет выполняться, если $x_2 \geqslant 0{,}5$, для переменной t $t_2 \leqslant \dfrac{1}{3}$.

Перепишем уравнение в виде $a(t+1) = -1 - \dfrac{t^2}{3}$; $a(t+1) = \dfrac{-3-t^2}{3}$; $a = \dfrac{-3-t^2}{3(t+1)}$.

Исследуем функцию $a(t) = \dfrac{-(t^2+3)}{3(t+1)}$.

ОДЗ: $t \neq -1$. Функция не имеет предела при $t \to \infty$.

$$a'(t) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2t(t+1) - (t^2+3)\cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{t^2+2t-3}{-3(t+1)^2} = \frac{(t-1)(t+3)}{-3(t+1)^2}.$$

$a'(t) = 0$ при $t = 1, t = -3$ (см. рис. 496).

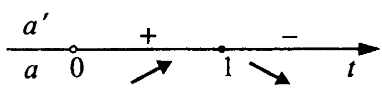


Рис. 496.

$a(1) = -\dfrac{2}{3}$; $a(-3) = 2$; $a(0) = -1$; $a\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{7}{9}$.

Построим график $y = a(t)$.

По рисунку 497 видно, что условие $t_1 > t_2 > 0$, $t_2 \leqslant \dfrac{1}{3}$ выполняется при $a \in \left(-1; -\dfrac{2}{3}\right]$.

788. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_9$ — оценки, выставленные каждым из членов жюри в порядке возрастания.

а) Предположим, что выполняется равенство $\left|\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_9}{9} - \dfrac{a_2+a_3+\dots+a_8}{7}\right| = \dfrac{2}{49}$. Умножим обе части равенства на $9 \cdot 49$, получим $7\left|7(a_1+\dots+a_9) - 9(a_2+\dots+a_8)\right| = 18$. Левая

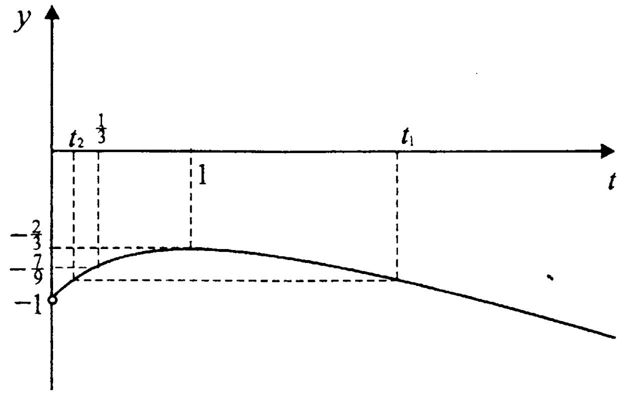


Рис. 497.

часть равенства делится на 7, а правая — нет, значит, указанное равенство не может выполняться.

б) Да, может. Например, если члены жюри выставили оценки 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

в) $\left|\dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{9} - \dfrac{a_2 + a_3 + \dots + a_8}{7}\right| =$

$= \left|\dfrac{a_1 + a_9}{9} - \dfrac{2}{63}(a_2 + a_3 + \dots + a_8)\right|.$

Оценим сумму $a_2 + a_3 + \dots + a_8$. $a_8 \leqslant a_9 - 1$; $a_7 \leqslant a_8 - 1 \leqslant a_9 - 2$; $\dots, a_2 \leqslant a_9 - 7$. Тогда $a_2 + \dots + a_8 \leqslant 7a_9 - (1 + 2 + \dots + 7) = 7a_9 - 28$. Аналогично $a_2 \geqslant a_1 + 1$; $a_3 \geqslant a_2 + 1 \geqslant a_1 + 2, \dots, a_8 \geqslant a_1 + 7$. Получим $a_2 + \dots + a_8 \geqslant 7a_1 + 28$.

Имеем $7a_1 + 28 \leqslant a_2 + \dots + a_8 \leqslant 7a_9 - 28$;

$\dfrac{2}{9}(a_1 + 4) \leqslant \dfrac{2}{63}(a_2 + \dots + a_8) \leqslant \dfrac{2}{9}(a_9 - 4)$;

$-\dfrac{2}{9}(a_9 - 4) \leqslant -\dfrac{2}{63}(a_2 + \dots + a_8) \leqslant -\dfrac{2}{9}(a_1 + 4)$;

$\dfrac{a_1 - a_9 + 8}{9} \leqslant \dfrac{a_1 + a_9}{9} - \dfrac{2}{63}(a_2 + a_3 + \dots + a_8) \leqslant \dfrac{a_9 - a_1 - 8}{9}$;

$\left|\dfrac{a_1 + a_9}{9} - \dfrac{2}{63}(a_2 + a_3 + \dots + a_8)\right| \leqslant \left|\dfrac{a_9 - a_1 - 8}{9}\right| = \dfrac{a_9 - a_1 - 8}{9} \leqslant$

$\leqslant \dfrac{15 - 0 - 8}{9} = \dfrac{7}{9}$.

Полученное максимальное значение разности оценок достигается, например, если выставлены оценки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15.

790. а) Очевидно, что все могут войти в группу A, например, если первый участник задаст вопрос второму, второй — третьему и т. д. При этом сотый участник задаст вопрос первому.

б) Пусть в группу A вошли k человек, тогда остальные $(144 - k)$ получили не менее чем по 2 вопроса каждый, то есть в сумме получили не менее $2(144 - k)$ вопросов. С другой стороны, они могли получить не более 144 вопросов (общее число вопросов), поэтому $2(144 - k) \leqslant 144$; $k \geqslant 72$.

Покажем, что $k = 72$ может быть реализовано. Пронумеруем всех участников. Пусть участник с номером $i(1 \leqslant i \leqslant 72)$ задал вопрос участнику с номером $i + 72$, а каждый участник с номером i, $73 \leqslant i \leqslant 143$ задал вопрос участнику с номером $i + 1$. Участник 144 задал вопрос участнику 73, тогда группа A состоит из участников с номерами от 1 до 72.

в) Пусть k_j — число участников, получивших j вопросов $(0 \leqslant j \leqslant 96)$.

Тогда всего участников $k_0 + k_1 + k_2 + \ldots + k_{96} = 97$.

Вопросов же в сумме было получено $0 \cdot k_0 + 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \ldots + 96 \cdot k_{96} = 97$.

Тогда $2(k_0 + k_1 + \ldots k_{96}) - (k_1 + 2k_2 + \ldots + 96k_{96}) = 2 \cdot 97 - 97$, откуда $2k_0 + k_1 - k_3 - 2k_4 - \ldots - 94k_{96} = 97$, то есть $2k_0 + k_1 \geqslant 97$, $k_0 + \frac{k_1}{2} \geqslant \frac{97}{2}$,

$k_0 + \frac{k_1}{2} \geqslant 48{,}5$.

Если k_1 чётно, то $k_0 + \frac{k_1}{2} \geqslant 49$, если k_1 нечётно, то в группе A не меньше, чем $k_0 + \frac{k_1 - 1}{2} \geqslant 48$ человек.

Покажем, что число участников в группе A может равняться 48. Пусть каждый участник с номером i, $1 \leqslant i \leqslant 48$, задал вопрос участнику с номером $i + 48$. Каждый участник с номером i, $49 \leqslant i \leqslant 96$, задал вопрос участнику $i + 1$, а участник 97 задал вопрос участнику 49. Тогда в группу A вошли участники с номерами от 1 до 48.

792. а) Цифра 1 в четырёхзначном числе может занимать одну из четырёх позиций:

$\overline{1abc}$, количество чисел такого вида равно $9 \cdot 9 \cdot 9$ (каждое из чисел a, b, c может принимать одно из девяти значений: от 2 до 9 или 0);

$\overline{a1bc}$, количество чисел такого вида равно $8 \cdot 9 \cdot 9$ (число a может принимать одно из восьми значений: от 2 до 9);

$\overline{ab1c}$, количество чисел такого вида равно $8 \cdot 9 \cdot 9$;

$\overline{abc1}$, количество чисел такого вида равно $8 \cdot 9 \cdot 9$.

Поэтому количество четырёхзначных чисел, содержащих в десятичной записи только одну цифру 1, равно
$9 \cdot 9 \cdot 9 + 8 \cdot 9 \cdot 9 + 8 \cdot 9 \cdot 9 + 8 \cdot 9 \cdot 9 = 9 \cdot 9 \cdot (9 + 8 + 8 + 8) = 81 \cdot 33 = 2673.$
б) Две позиции цифра 1 в четырёхзначном числе может занимать шестью различными способами. Если запись четырёхзначного числа начинается с цифры 1, то возможны три варианта:
($\overline{11ab}$, $\overline{1a1b}$, $\overline{1ab1}$). В каждом из этих вариантов количество чисел равно $9 \cdot 9 = 81$.

Если запись четырёхзначного числа начинается с цифры, отличной от 1, то возможны тоже три варианта: ($\overline{a11b}$, $\overline{a1b1}$, $\overline{ab11}$). В каждом из этих вариантов количество чисел равно $8 \cdot 9 = 72$.

Поэтому количество четырёхзначных чисел, содержащих в их десятичной записи только две цифры 1, равно $81 \cdot 3 + 72 \cdot 3 = 459$.
в) Количество четырёхзначных чисел, содержащих в десятичной записи хотя бы одну цифру 1, легче посчитать как разность между количеством всех четырёхзначных чисел (их 9000) и количеством четырёхзначных чисел, не содержащих в десятичной записи цифру 1, т.е. чисел вида $abcd$, где $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1, d \neq 1, a \neq 0$. Их $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$.

Поэтому количество четырёхзначных чисел, содержащих в десятичной записи хотя бы одну цифру 1, равно $9000 - 5832 = 3168$.

794. а) Нельзя. С помощью первых семи натуральных чисел в сумме можно получить два точных квадрата 4 или 9. Под числом 1 может быть записано только число 3, но под числом 6 тоже может быть записано только число 3. Противоречие с условием задачи.

б) Можно. С помощью первых двенадцати натуральных чисел в сумме можно получить три точных квадрата 4, 9, 16. Сумма числа 12 и числа, записанного под ним, заключена между 13 и 24. На этом отрезке имеется только один точный квадрат 16. Запишем под числом 12 число 4, аналогично под числом 4 — число 12. Также проверяем, что под числами 9, 10, 11, 5, 6, 7 должны быть записаны числа 7, 6, 5, 11, 10, 9 соответственно. Далее под оставшимися числами 1, 2, 3, 8 записываем числа 3, 2, 1, 8 соответственно.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4

в) Можно. Под каждым из чисел 101, 102, ..., 2014, 2015 запишем числа 2015, 2014, ..., 102, 101 соответственно. Тогда сумма чисел в каждом столбце, начиная с 101-го, равна $2116 = 46^2$. Под каждым из чисел 21, 22, ..., 99, 100 запишем числа 100, 99, ..., 22, 21. Тогда сумма чисел в каждом столбце, с 21-го по 100-й, равна $121 = 11^2$. Под каждым из чисел 16, 17, 18, 19, 20 запишем числа 20, 19, 18, 17, 16. Тогда сумма чисел в каждом столбце, с 16-го по 20-й, равна $36 = 6^2$. Под каждым из чисел 1, 2, ..., 14, 15 запишем числа 15, 14, ..., 2, 1. Тогда сумма чисел в каждом столбце, с 1-го по 15-й, равна $16 = 4^2$.

Ответы к тренировочным заданиям

§ 1. Простые текстовые задачи

1. 7. **2.** 4. **3.** 13. **4.** 6. **5.** 12. **6.** 8. **7.** 10. **8.** 15. **9.** 11. **10.** 10. **11.** 7. **12.** 13. **13.** 11. **14.** 11. **15.** 33. **16.** 20. **17.** 17. **18.** 12. **19.** 18. **20.** 5. **21.** 6. **22.** 8. **23.** 9. **24.** 13. **25.** 4. **26.** 5. **27.** 76. **28.** 122. **29.** 52,5. **30.** 20. **31.** 18. **32.** 17. **33.** 868. **34.** 348,8. **35.** 24. **36.** 22. **37.** 56. **38.** 272. **39.** 875. **40.** 594,3. **41.** 182,7. **42.** 1931,8. **43.** 1378. **44.** 20. **45.** 25. **46.** 1300. **47.** 175. **48.** 74 520. **49.** 144 000. **50.** 21 000. **51.** 2730. **52.** 18 170. **53.** 12. **54.** 8. **55.** 27. **56.** 5. **57.** 10. **58.** 22. **59.** 12. **60.** 5. **61.** 23. **62.** 2240. **63.** 9 500.

§ 2. Соответствие между величинами и их значениями

64. 2341. **65.** 2143. **66.** 4123. **67.** 2413. **68.** 2431. **69.** 3412. **70.** 4312. **71.** 3412. **72.** 1432. **73.** 4123. **74.** 3241. **75.** 2413. **76.** 4321. **77.** 2143. **78.** 4132. **79.** 1423. **80.** 4123. **81.** 2143. **82.** 2341. **83.** 2431.

§ 3. График функции и элементы статистики

84. 500. **85.** 90. **86.** 31,5. **87.** 1,2. **88.** 12. **89.** 48. **90.** 14. **91.** 3. **92.** 45,5. **93.** 14. **94.** 4170. **95.** 11. **96.** 2. **97.** 16. **98.** 7. **99.** 4. **100.** 6. **101.** 4. **102.** 4. **103.** 9. **104.** 5. **105.** 6. **106.** 4132. **107.** 3142. **108.** 2413. **109.** 4312. **110.** 2143.

§ 4. Табличное и графическое представление данных

111. 3740. **112.** 3600. **113.** 8750. **114.** 1832,6. **115.** 4131. **116.** 2124. **117.** 21 260. **118.** 9750. **119.** 2855. **120.** 2,9. **121.** 1,6. **122.** 2,8. **123.** 185. **124.** 710. **125.** 65. **126.** 38. **127.** 120. **128.** 71. **129.** 28. **130.** 12,02. **131.** 62,11. **132.** 0,86. **133.** 75. **134.** 10 750. **135.** 20 451,6. **136.** 20 811. **137.** 627. **138.** 1428. **139.** 249. **140.** 389. **141.** 6 и 8. **142.** 234 и 345. **143.** 135. **144.** 156.

§ 5. Текстовые задачи

145. 96. **146.** 18. **147.** 30. **148.** 15. **149.** 19. **150.** 12. **151.** 3. **152.** 16. **153.** 80. **154.** 17. **155.** 30. **156.** 350. **157.** 1400. **158.** 200. **159.** 200. **160.** 80. **161.** 70. **162.** 57. **163.** 40. **164.** 45. **165.** 45. **166.** 20. **167.** 25. **168.** 6. **169.** 12. **170.** 30. **171.** 6. **172.** 5. **173.** 6,4. **174.** 6. **175.** 32,2. **176.** 11. **177.** 27. **178.** 7,5. **179.** 375. **180.** 40. **181.** 6. **182.** 4. **183.** 30. **184.** 1 562 500.

§ 6. Теория вероятностей

185. 0,25. **186.** 0,25. **187.** 0,25. **188.** 0,4. **189.** 0,2. **190.** 0,4. **191.** 0,75. **192.** 0,3. **193.** 0,16. **194.** 0,45. **195.** 0,15. **196.** 0,92. **197.** 0,91. **198.** 0,375. **199.** 0,65. **200.** 0,45. **201.** 0,16. **202.** 0,2. **203.** 0,14. **204.** 0,16. **205.** 0,1. **206.** 0,007. **207.** 0,87. **208.** 0,85. **209.** 0,4. **210.** 0,24. **211.** 0,2. **212.** 0,3125. **213.** 0,2. **214.** 0,32. **215.** 0,5. **216.** 0,25. **217.** 0,125. **218.** 0,0625. **219.** 5. **220.** 5. **221.** 0,17. **222.** 0,08. **223.** 0,08. **224.** 0,12. **225.** 0,8. **226.** 0,18.

227. 0,12. **228.** 0,006. **229.** 0,81. **230.** 0,96. **231.** 0,02. **232.** 0,05. **233.** 0,0001. **234.** 0,0625. **235.** 0,0625. **236.** 0,125. **237.** 0,25. **238.** 0,4. **239.** 0,4. **240.** 0,12. **241.** 0,52. **242.** 0,16. **243.** 0,47. **244.** 0,7. **245.** 0,18. **246.** 0,33. **247.** 0,28. **248.** 0,33. **249.** 0,42. **250.** 0,55. **251.** 0,43. **252.** 0,384. **253.** 0,352. **254.** 0,266.

§ 7. Нахождение величины из формулы

255. 270. **256.** 162. **257.** 4. **258.** 3. **259.** 12. **260.** 40. **261.** 30. **262.** 17. **263.** 34. **264.** 0,3. **265.** 1,5. **266.** 216. **267.** 6. **268.** 300. **269.** 1100. **270.** 7. **271.** 17. **272.** 4. **273.** 0,1. **274.** 9.

§ 8. Координатная прямая и числовые промежутки

275. 4. **276.** 2. **277.** 2413. **278.** 4312. **279.** 3142. **280.** 4213. **281.** 4321. **282.** 2143. **283.** 2134. **284.** 1342. **285.** 4132. **286.** 2413. **287.** 2413. **288.** 1342. **289.** 4321. **290.** 1234. **291.** 1324.

§ 9. Уравнения

292. −0,25. **293.** 15. **294.** 32. **295.** −9. **296.** 16. **297.** 0,6. **298.** −1. **299.** −2. **300.** 0,5. **301.** 0. **302.** −3. **303.** 27. **304.** −1,75. **305.** −5. **306.** 2,5. **307.** −3,5. **308.** −6. **309.** 1. **310.** −5. **311.** −7. **312.** −2. **313.** −11. **314.** 2. **315.** 22. **316.** 1,2. **317.** 2. **318.** 3. **319.** 2,5. **320.** −3. **321.** 8. **322.** −2. **323.** 3,5. **324.** 2,5. **325.** 2,8. **326.** 8,5. **327.** 6. **328.** 0. **329.** 3. **330.** −4. **331.** 24. **332.** 18. **333.** 5,25. **334.** −11. **335.** 15. **336.** 47. **337.** 2. **338.** 1. **339.** 1. **340.** −3,5. **341.** 3. **342.** 5.

§ 10. Преобразования выражений

343. 36,4. **344.** −5. **345.** 25. **346.** 0,25. **347.** 216. **348.** 7. **349.** 24. **350.** 0,125. **351.** 49. **352.** 121. **353.** 14. **354.** 64. **355.** 128. **356.** 7. **357.** 2. **358.** 5. **359.** 25. **360.** 147. **361.** 6. **362.** 2. **363.** 3. **364.** −1. **365.** 0,25. **366.** 0,25. **367.** 2. **368.** 81. **369.** 6. **370.** 1. **371.** 1. **372.** 3. **373.** 5. **374.** −24. **375.** −15. **376.** −1,25. **377.** 42. **378.** 27. **379.** 4. **380.** −0,875. **381.** 1,5. **382.** 4.

§ 11. Геометрический смысл производной. Первообразная

383. −2. **384.** 1,5. **385.** −2. **386.** −1,2. **387.** 1. **388.** 10. **389.** 2. **390.** 3. **391.** 3. **392.** 6. **393.** −1. **394.** −1. **395.** 4. **396.** 3. **397.** 2. **398.** 7. **399.** 4. **400.** 5. **401.** 5. **402.** 14. **403.** 4. **404.** 2. **405.** −4. **406.** 3. **407.** 4. **408.** 2. **409.** 1. **410.** 45. **411.** 45. **412.** 1. **413.** 135. **414.** −1. **415.** 1243. **416.** 2314. **417.** 4213. **418.** 4312. **419.** −2. **420.** 10,5. **421.** 2. **422.** 9. **423.** 18. **424.** 6. **425.** 8. **426.** 7. **427.** 18. **428.** 18. **429.** 21.

§ 12. Исследование функции с помощью производной

430. 2. **431.** 1. **432.** 0. **433.** 2. **434.** 9. **435.** −15. **436.** −40. **437.** 44. **438.** 2. **439.** 4. **440.** −6. **441.** 4. **442.** −1. **443.** 6. **444.** −3. **445.** 16. **446.** 3,6. **447.** 16. **448.** 2020,5. **449.** 51. **450.** 4. **451.** −3. **452.** 7. **453.** −9. **454.** −3.

§ 13. Содержательные задачи из различных областей науки

455. 12. **456.** 11. **457.** 0,3875. **458.** 24. **459.** 5. **460.** 8. **461.** 15 000. **462.** 2400. **463.** 1400. **464.** 387,5. **465.** 30. **466.** 60. **467.** 4. **468.** 317,5. **469.** 7000. **470.** 10 000. **471.** 4. **472.** 80. **473.** 49. **474.** 5,6. **475.** 25. **476.** 60. **477.** 30. **478.** 3. **479.** 2,7. **480.** 6,8. **481.** 3. **482.** 0,075. **483.** 30. **484.** 30. **485.** 60. **486.** 0,33. **487.** 60. **488.** 30. **489.** 90. **490.** 30. **491.** 10,4. **492.** 45. **493.** 8. **494.** 0,02. **495.** 0,045.

§ 14. Планиметрия: площади фигур

496. 6. **497.** 8. **498.** 3. **499.** 8. **500.** 4. **501.** 27. **502.** 10. **503.** 29. **504.** 16. **505.** 20. **506.** 26. **507.** 6. **508.** 18. **509.** 18. **510.** 20. **511.** 8. **512.** 16. **513.** 4. **514.** 22. **515.** 7. **516.** 28. **517.** 39,5. **518.** 14. **519.** 14,5. **520.** 5. **521.** 16. **522.** 8. **523.** 0,5 и 2,5. **524.** 10. **525.** 5.

§ 15. Планиметрия: углы и длины

526. 60. **527.** 136. **528.** 126. **529.** 63. **530.** 72. **531.** 52. **532.** 44. **533.** 51. **534.** 40. **535.** 30. **536.** 4. **537.** 36. **538.** 6. **539.** 6. **540.** 22. **541.** 7. **542.** 18. **543.** 7. **544.** 44. **545.** 10. **546.** 22. **547.** 38. **548.** 52. **549.** 23. **550.** 128. **551.** 36. **552.** 32. **553.** 18. **554.** 14. **555.** 67,5. **556.** 61. **557.** 60. **558.** 151. **559.** 7,5. **560.** 30. **561.** 7. **562.** 3,125. **563.** 4,5. **564.** 8. **565.** 15. **566.** 24. **567.** 51. **568.** 117. **569.** 12. **570.** 6. **571.** 18.

§ 16. Практические задания по планиметрии

572. 3. **573.** 90. **574.** 1776. **575.** 760. **576.** 170. **577.** 650. **578.** 2400. **579.** 3300. **580.** 160. **581.** 8. **582.** 13. **583.** 12. **584.** 15. **585.** 3,6. **586.** 8. **587.** 3,5.

§ 17. Тригонометрия, координаты и векторы

588. 0,6. **589.** 0,7. **590.** 0,8. **591.** 0,5. **592.** 1,375. **593.** 0,96. **594.** 0,6. **595.** 48,75. **596.** 12,75. **597.** 4. **598.** 3. **599.** 0,2. **600.** 16. **601.** 13,5. **602.** 38,4. **603.** 12. **604.** 7,5. **605.** 12. **606.** 2. **607.** 0,35. **608.** 0,25. **609.** 0,28. **610.** −0,3. **611.** −0,3. **612.** 0,4. **613.** −0,6. **614.** 11. **615.** −2. **616.** −3. **617.** 2,5. **618.** 3,5. **619.** 10. **620.** 4. **621.** 10. **622.** 50. **623.** 15. **624.** −5. **625.** 5. **626.** 50. **627.** 6. **628.** 98.

§ 18. Параллелепипед, призма, пирамида

629. 780. **630.** 222. **631.** 0,96. **632.** 56. **633.** 10. **634.** 61. **635.** 54. **636.** 89. **637.** 1,5. **638.** 60. **639.** 1. **640.** 128. **641.** 160. **642.** 174. **643.** 134. **644.** 90. **645.** 3. **646.** 16. **647.** 1944. **648.** 7. **649.** 6. **650.** 64. **651.** 45. **652.** 7. **653.** 3,5. **654.** 200. **655.** 2. **656.** 96. **657.** 12. **658.** 12. **659.** 4. **660.** 30. **661.** 3. **662.** 75. **663.** 22,5. **664.** 30. **665.** 30. **666.** 45. **667.** 736. **668.** 54. **669.** 384. **670.** 17,5. **671.** 250. **672.** 10 368. **673.** 96. **674.** 4. **675.** 36. **676.** 4.

§ 19. Цилиндр, конус, шар, комбинации тел

677. 5. **678.** 1000. **679.** 324. **680.** 6. **681.** 2. **682.** 12. **683.** 7. **684.** 125. **685.** 120. **686.** 72. **687.** 125. **688.** 6,25. **689.** 10. **690.** 17. **691.** 12. **692.** 1125. **693.** 434. **694.** 3600. **695.** 41. **696.** 16. **697.** 40. **698.** 30. **699.** 64. **700.** 6,25. **701.** 40. **702.** 9. **703.** 27. **704.** 9. **705.** 50,41. **706.** 48. **707.** 16,5. **708.** 54. **709.** 6. **710.** 64 000. **711.** 81. **712.** 27. **713.** 5. **714.** 60. **715.** 21,2. **716.** 10. **717.** 12,5.

§ 20. Тригонометрические уравнения и отбор корней

718. а) $\pi k, k \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; б) $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, 2π. **719.** а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in Z$; $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{6}$. **720.** а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$. **721.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$. **722.** а) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; б) 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. **723.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $(-1)^{n+1} + \pi n$; $k, n \in Z$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$. **724.** а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $k, n \in Z$; б) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{6}$. **725.** а) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; $\frac{\operatorname{arctg} 3}{3} + \frac{\pi n}{3}$; k, $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\operatorname{arctg} 3}{3} - \frac{\pi}{3}$, $\frac{\operatorname{arctg} 3}{3}$, $\frac{\pi}{12}$. **726.** а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{7\pi}{4}$. **727.** а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. б) $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$. **728.** а) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) -5π; $-\frac{9\pi}{2}$; -4π. **729.** а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; б) $\frac{25\pi}{6}$. **730.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k, n \in Z$; б) $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$. **731.** а) πn, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k, n \in Z$; б) $-\frac{7\pi}{6}$; $-\pi$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; 0.

§ 21. Стереометрия

732. 6. **733.** 60. **734.** $\operatorname{arctg}\frac{4-\sqrt{7}}{12}$. **735.** $\operatorname{arctg}\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$. **736.** $\frac{\sqrt{3}}{18}$.

737. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **738.** $\frac{\sqrt{70}}{10}$. **739.** $\frac{\sqrt{58}}{17}$. **740.** $-\frac{9}{73}$. **741.** $\frac{72\sqrt{35}}{5}$. **742.** $\arccos\frac{1}{3}$.

743. $\frac{\pi}{3}$.

§ 22. Неравенства и системы неравенств

744. $[-16;\ -2)\cup(-2;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{16};\ 0\right)$.

745. $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ -1)\cup\left[-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{27}\right)$. **746.** $(0;1)\cup(\sqrt{3};9)$.

747. $(0;\sqrt{11})\cup(4;11)$. **748.** $x>3$. **749.** $3<x<9$. **750.** $x=0,\ x=2$.
751. 0. **752.** $\{-4;0\}\cup[2;3)$. **753.** $[-5;-3]\cup\{0\}$.
754. $(0;\log_5 2]\cup[5;6)\cup(6;7]$. **755.** $(0;\log_3 2]\cup[6;7)\cup(7;8]$. **756.** $(4;+\infty)$.
757. $(14+2\sqrt{51};+\infty)$. **758.** $(-2;\log_5 4]$, $[1;3]$. **759.** $(-1;0]$.

§ 23. Планиметрия

760. 17. **761.** $\frac{25\sqrt{3}}{3}$. **762.** 8. **763.** $18+2\sqrt{17}$. **764.** 2. **765.** 1. **766.** 6. **767.** $8\sqrt{3}$.

768. 12,5. **769.** 36. **770.** 5. **771.** 6.

§ 24. Экономическая задача

772. 8 400 000. **773.** 5 040. **774.** 16 800 рублей. **775.** 5 696 703. **776.** 4.
777. 48 000. **778.** 5 лет. **779.** 6 лет.

§ 25. Уравнения и неравенства с параметром

780. $\pm\sqrt{2}$. **781.** $\frac{5\pm2\sqrt{2}}{2}$. **782.** $a<-8$ или $a>5$. **783.** $a<-15$; $a>10$.

784. $[-2;\ -1]$. **785.** $\left[\frac{13}{4};\ 6\right]$. **786.** $a\in\left(-1;-\frac{7}{9}\right]$. **787.** $[-2{,}49;-2)$.

§ 26. Исследовательские задачи

788. а) нет; б) да; в) $\frac{7}{9}$. **789.** а) нет; б) да; в) $\frac{3}{4}$. **790.** а) 100; б) 72; в) 48.

791. а) 2; б) нет; в) 40. **792.** а) 2673; б) 459; в) 3168. **793.** а) 2187; б) 243; в) 2439. **794.** а) нельзя; б) можно; в) можно. **795.** а) нельзя; б) можно; в) можно.

Ответы к заданиям для контроля

§ 1. Простые текстовые задачи

	1	2	3	4	5
Вар. 1	7	6	80	69 300	15 000
Вар. 2	8	6	456	15	2000
Вар. 3	11	22	1	7	11 200
Вар. 4	10	3	56	15	15

§ 2. Соответствие между величинами и их значениями

	1	2	3	4	5
Вар. 1	1243	4312	4132	1423	3142
Вар. 2	4123	2143	2413	3142	4321
Вар. 3	4123	4321	2143	2413	4312
Вар. 4	3421	2413	2314	4132	4123

§ 3. График функции и элементы статистики

	1	2	3	4	5
Вар. 1	7	6	32	3	1342
Вар. 2	5	25	2	8,5	3421
Вар. 3	3	13	4	12	4123
Вар. 4	10	20	1	4	3421

§ 4. Выбор наилучшего варианта

	1	2	3	4	5
Вар. 1	24 480	209 440	700	62,5	7
Вар. 2	30 600	5900	95 550	25 375	256
Вар. 3	13 600	97 200	5200	65 190	135 и 145
Вар. 4	22	1 207 800	20 610	1173	56

§ 5. Текстовые задачи

	1	2	3	4	5
Вар. 1	120	21	14	600	35
Вар. 2	75	16	20	22,5	513
Вар. 3	55	2	5	18	10
Вар. 4	36	20	1,5	20	5,9

§ 6. Теория вероятностей

	1	2	3	4	5
Вар. 1	0,486	0,25	0,9936	0,19	0,088
Вар. 2	0,925	0,16	0,251	0,125	0,1056
Вар. 3	0,8	0,375	0,47	0,084	0,02
Вар. 4	0,65	0,25	0,79	0,45	0,16

§ 7. Нахождение величины из формулы

	1	2	3	4	5
Вар. 1	35	15	1,2	12,5	0,125
Вар. 2	300	28,4	4500	4	22
Вар. 3	24 200	40	−0,625	21	6
Вар. 4	405	60	5	4	0,25

§ 8. Координатная прямая и числовые промежутки

	1	2	3	4	5
Вар. 1	4312	2143	3142	3412	3412
Вар. 2	2314	4312	2341	3142	1342
Вар. 3	4321	4321	4231	1342	1234
Вар. 4	2413	2341	2314	4321	3241

§ 9. Уравнения

	1	2	3	4	5
Вар. 1	18	8,5	7	−3,8	−2
Вар. 2	−42	2,625	9	5	−2,5
Вар. 3	−507	−2	−2	−7,6	3
Вар. 4	118	9	2	−5	1,8

§ 10. Преобразования выражений

	1	2	3	4	5
Вар. 1	0,25	0,16	45	3	−18
Вар. 2	243	28	7	25	4
Вар. 3	3	144	3	2	8
Вар. 4	539	2	9	8	−8

§ 11. Геометрический смысл производной. Первообразная

	1	2	3	4	5
Вар. 1	0	1	2	0,75	8,8125
Вар. 2	27	3	8	1	11,5
Вар. 3	−4	2	3	2	9
Вар. 4	−5,5	−14	6	2	27

§ 12. Исследование функции с помощью производной

	1	2	3	4	5
Вар. 1	50	10	2	31	30
Вар. 2	−6	2	−88	−3	36
Вар. 3	2	8	−146	80	−22
Вар. 4	110	15	−14	11	2

§ 13. Содержательные задачи из различных областей науки

	1	2	3	4	5
Вар. 1	0,3	3,75	50	15	1,6
Вар. 2	10	2,2	300	120	1800
Вар. 3	2000	80	90	45	2,5
Вар. 4	0,5875	5	20	45	8,8

§ 14. Планиметрия: площади фигур

	1	2	3	4	5
Вар. 1	10	17,5	2	3	15
Вар. 2	15	6	18	3	12
Вар. 3	8	12	6	10	3,375
Вар. 4	12	8	70	7,5	21

§ 15. Планиметрия: углы и длины

	1	2	3	4	5
Вар. 1	42	122	110	6	21
Вар. 2	52	70	19	20	5
Вар. 3	30	36	52	107	12
Вар. 4	27	70	14	5	2

§ 16. Практические задания по планиметрии

	1	2	3	4	5
Вар. 1	17,5	153	1,8	108	30
Вар. 2	0,1	121	2,5	200	300
Вар. 3	28	2000	12	40	600
Вар. 4	30	740	550	120	700

§ 17. Тригонометрия, координаты и векторы

	1	2	3	4	5
Вар. 1	0,6	3,25	1,75	10	64
Вар. 2	4	3,25	33	2	12
Вар. 3	0,9	0,6	56	2	0
Вар. 4	0,9	0,8	24	10	20

§ 18. Параллелепипед, призма, пирамида

	1	2	3	4	5
Вар. 1	1040	60	2	3	0,96
Вар. 2	9	45	90	12	45
Вар. 3	27	45	60	13	9
Вар. 4	84	0,2	90	12	13

§ 19. Цилиндр, конус, шар, комбинации тел

	1	2	3	4	5
Вар. 1	4	1	18	9	6,25
Вар. 2	24	180	9	8	3
Вар. 3	120	48	12	2,25	25
Вар. 4	7	12	5	5	89

ЕГЭ

Учебное издание

Иванов Сергей Олегович, **Коннова** Елена Генриевна,
Кривенко Виктор Михайлович, **Нужа** Галина Леонтьевна,
Ольховая Людмила Сергеевна, **Резникова** Нина Михайловна,
Фридман Елена Михайловна, **Ханин** Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА. ЕГЭ-2016. 10–11 классы.
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНИНГ

Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Л. Андрецова*

Подписано в печать с оригинал-макета 19.08.2015.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,25.
Тираж 5000 экз. Заказ № **21**.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009 зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ООО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.